



Sur les correspondances de McKay pour le schéma de Hilbert de points sur le plan affine

Samuel Boissière

► To cite this version:

Samuel Boissière. Sur les correspondances de McKay pour le schéma de Hilbert de points sur le plan affine. Mathématiques [math]. Université de Nantes, 2004. Français. NNT : . tel-00007177

HAL Id: tel-00007177

<https://theses.hal.science/tel-00007177>

Submitted on 22 Oct 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NANTES
FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

ÉCOLE DOCTORALE
SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'INFORMATION ET DES MATÉRIAUX

Année 2004

**SUR LES CORRESPONDANCES DE MCKAY
POUR LE SCHÉMA DE HILBERT DE POINTS
SUR LE PLAN AFFINE**

Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes

Spécialité : MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Présentée et soutenue publiquement par

Samuel BOISSIÈRE

*le 27 septembre 2004 à l'Université de Nantes
devant le jury ci-dessous*

Président	: Manfred LEHN	Professeur (Mayence)
Rapporteurs	: Geir ELLINGSRUD	Professeur (Oslo)
	Éric VASSEROT	Professeur (Cergy-Pontoise)
Examineurs	: Vincent FRANJOU	Professeur (Nantes)
	Dmitry KALEDIN	Professeur (Moscou)
	François LAUDENBACH	Professeur (Nantes)
	Christoph SORGER	Professeur (Nantes)
	Éric VASSEROT	Professeur (Cergy-Pontoise)

Directeur de Thèse : Christoph SORGER
Laboratoire : Jean Leray (UMR 6629 CNRS/UN)

N° E.D. : 0366-158

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers Christoph Sorger, mon directeur de thèse, pour ses encouragements permanents, son soutien et la confiance qu'il m'a accordée. Nos longues discussions m'ont beaucoup appris sur la vie d'un laboratoire de Mathématiques ; j'ai pu profiter de son vaste savoir mathématique et me laisser guider par son intuition. J'ai aussi eu grand plaisir et grand bénéfice à enseigner les travaux dirigés de géométrie algébrique en Maîtrise de Mathématiques sous sa direction.

J'adresse des remerciements tout particuliers à Manfred Lehn pour son aide, ses remarques judicieuses, sa disponibilité et la générosité de ses idées mathématiques. Je suis très honoré qu'il ait accepté de présider le jury et le remercie aussi pour le contrat post-doctoral qu'il m'offre à l'Université de Mayence.

Je remercie Éric Vasserot pour ses éclaircissements, ses réponses à mes nombreuses questions, pour avoir accepté de rapporter ma thèse et pour sa présence dans le jury. Je remercie aussi Geir Ellingsrud pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en acceptant de le rapporter.

Je suis flatté de remercier Vincent Franjou, Dmitry Kaledin et François Laudénbach pour avoir siégé dans le jury.

Pour leurs explications, réponses ou remarques, je remercie Michel Brion, Baohua Fu, Victor Ginzburg, Mark Haiman, Laurent Manivel, Marc Nieper-Wißkirchen et Miles Reid.

Pour leur relecture attentive et leurs suggestions, je remercie Laurent Évain et Friedrich Wagemann.

Je voudrais aussi remercier les membres du Département de Mathématiques de l'Université de Nantes, au sein duquel cette thèse fut préparée. Merci aussi à l'équipe de thésards pour la bonne humeur qui régnait, spécialement à Arnaud Sourisse, dont l'amitié m'a accompagné pendant toutes ces années et qui s'est occupé de la reproduction de la thèse.

Tout ceci n'aurait pu voir le jour sans la proximité de mes relecteurs stylistiques préférés, supporters inconditionnels, garants de mon moral et de mon garde-manger, Gaby et Denise, mes parents.

À mes parents

Samuel Boissière

**SUR LES CORRESPONDANCES
DE MCKAY POUR LE SCHÉMA
DE HILBERT DE POINTS SUR
LE PLAN AFFINE**

Samuel Boissière

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, Université de Nantes,
2 rue de la Houssinière, 44322 Nantes Cedex 03, France.

Classification mathématique par sujets (2000). — Primaire 14C05 ;
Secondaire 05E05, 20B30, 55N91.

Mots clefs. — Schéma de Hilbert, correspondance de McKay, fonctions
symétriques, cohomologie équivariante, classes caractéristiques, polynômes de
Macdonald.

SUR LES CORRESPONDANCES DE MCKAY POUR LE SCHÉMA DE HILBERT DE POINTS SUR LE PLAN AFFINE

Samuel Boissière

Résumé. — Le quotient d'un espace vectoriel de dimension finie par l'action d'un sous-groupe fini d'automorphismes est une variété en général singulière. Sous bonnes hypothèses, la correspondance de McKay relie la géométrie de bonnes résolutions des singularités aux représentations du groupe. Pour le schéma de Hilbert de points sur le plan affine, nous étudions comment les différentes correspondances (McKay, McKay duale et McKay multiplicative) sont reliées les unes aux autres. A cette fin, nous calculons des formules combinatoires pour les classes caractéristiques des fibrés vectoriels usuels sur le schéma de Hilbert de points sur le plan affine. Parallèlement, nous étudions le comportement multiplicatif du théorème de Bridgeland, King & Reid construisant la correspondance de McKay pour le schéma de Hilbert de points sur le plan affine. Dans une dernière partie, nous calculons les classes de Chern du fibré tangent au schéma de Hilbert de points sur le plan affine.

***Abstract* (On the McKay correspondences for the Hilbert scheme of points on the affine plane)**

The quotient of a finite-dimensional vector space by the action of a finite subgroup of automorphisms is usually a singular variety. Under appropriate assumptions, the McKay correspondence relates the geometry of nice resolutions of singularities and the representations of the group. For the Hilbert scheme of points on the affine plane, we study how the different correspondences (McKay, dual McKay and multiplicative McKay) are related to each other. For this purpose, we compute combinatorial formulas for the characteristic classes of the usual vector bundles on the Hilbert scheme of points on the affine plane. We also study the multiplicative behavior of the theorem of Bridgeland, King & Reid constructing the McKay correspondence for the Hilbert scheme of points on the affine plane. We finish with the computation of the Chern classes of the tangent bundle on the Hilbert scheme of points on the affine plane.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	xiii
1. Fonctions symétriques	1
1.1. L'algèbre des fonctions symétriques.....	1
1.2. Partitions d'un entier.....	2
1.3. Fonctions symétriques usuelles.....	3
1.4. Relation avec les représentations du groupe symétrique.....	6
1.5. Substitutions pléthystiques.....	7
2. Polynômes de Macdonald	9
2.1. L'algèbre $\Lambda_{\mathbf{Q}(q,t)}$	9
2.2. Polynômes de Macdonald.....	10
2.3. Polynômes de Macdonald modifiés.....	10
3. Schémas de Hilbert sur le plan affine	13
3.1. Schéma de Hilbert de points.....	13
3.2. Schéma de Hilbert isospectral.....	18
3.3. Schéma de Hilbert d'orbites.....	18
4. Classes de Chern des fibrés linéarisés	21
4.1. Action du tore sur le schéma de Hilbert de points.....	21
4.2. Classes de Chern des fibrés linéarisés.....	26
4.3. Commentaire.....	30
4.4. Formules globales.....	32
5. Action des fibrés linéarisés	35
5.1. Formules de caractères.....	36
5.2. Action des fibrés linéarisés.....	37
5.3. Cas du fibré tautologique.....	40
5.4. Application : résolution des anneaux de polygraphes.....	45

6. Correspondances de McKay	57
6.1. Généralités sur les correspondances de McKay.....	57
6.2. Le cas du schéma de Hilbert de points.....	61
6.3. Commentaire.....	68
7. Fibré tangent du schéma de Hilbert de points	69
7.1. Cohomologie des schémas de Hilbert de points.....	69
7.2. Formules universelles.....	74
7.3. Séries génératrices pour le fibré tautologique sur $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$	87
7.4. Séries génératrices pour le fibré tangent sur $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$	91
A. Homologie et cohomologie	99
B. Cohomologie équivariante	101
C. K-théorie	105
D. Degré de complexité	109
E. Carquois de McKay pour le groupe symétrique	113
Bibliographie	117

INTRODUCTION

LES CORRESPONDANCES DE MCKAY

Nous proposons ici un survol de certains aspects du développement des correspondances de McKay. Cette présentation est assez personnelle mais est issue en grande partie de la lecture de Brylinski [Bry], Gonzales-Sprinberg & Verdier [GSV83], Craw [Cra01] et Reid [Rei97, Rei00].

Correspondance de McKay en dimension deux

- Soit G un sous-groupe fini non trivial de $SL(2, \mathbf{C})$. La variété quotient $\mathbf{C}^2/G := \text{Spec } \mathbf{C}[x, y]^G$ a un unique point singulier à l'origine. Il existe une résolution *minimale* des singularités $\rho : Y \rightarrow \mathbf{C}^2/G$ où Y est une surface algébrique lisse dont le diviseur exceptionnel est une réunion de courbes rationnelles C_1, \dots, C_r d'auto-intersection -2 se coupant mutuellement transversalement en au plus un point. On peut alors construire un graphe de sommets $i = 1, \dots, r$ pour chaque courbe C_i en reliant deux sommets par une arête si les courbes correspondantes s'intersectent. On obtient ainsi, d'après une analyse au cas par cas de DuVal et Artin (voir Reid [Rei]), des graphes de Dynkin de type ADE :

G	graphe de la résolution
cyclique $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$	A_{n-1}
diédral binaire \mathbb{D}_{2n}	D_{n+2}
tétraédral binaire	E_6
octaédral binaire	E_7
icosaédral binaire	E_8

• Soit $\{V_0, V_1, \dots, V_k\}$ les représentations irréductibles de G , V_0 étant la représentation triviale, et Q la représentation de G dans \mathbf{C}^2 induite par l'inclusion $G \subset SL(2, \mathbf{C})$. En considérant les décompositions :

$$Q \otimes V_i = \bigoplus_{j=0}^k V_j^{\oplus a_{i,j}},$$

McKay [McK80] construit un graphe de sommets $j = 0, 1, \dots, k$ pour chaque représentation irréductible V_j en reliant deux sommets i et j par $a_{i,j}$ arêtes. Il observe par une analyse au cas par cas que les graphes obtenus sont les graphes de Dynkin complétés $\tilde{A}_{n-1}, \tilde{D}_{n+2}, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$.

• En regroupant ces deux informations, on relie ainsi la géométrie de la résolution Y aux représentations du groupe G : les classes de cohomologie des courbes C_i forment une base de $H^2(Y, \mathbf{Q})$ et en ajoutant la classe d'un point on a une base de $H^*(Y, \mathbf{Q})$ donnant une bijection :

$$\begin{array}{ccc} \{\text{représentations irréductibles de } G\} & \longleftrightarrow & \{\text{base de } H^*(Y, \mathbf{Q})\} \\ V_0 & \longleftrightarrow & [pt] \\ V_i, i = 1, \dots, k & \longleftrightarrow & [C_i] \end{array}$$

• Gonzales-Sprinberg & Verdier [GSV83] interprètent ensuite géométriquement cette correspondance en construisant, pour chaque représentation de G , un fibré vectoriel sur Y de telle sorte que la correspondance de McKay soit réalisée comme un isomorphisme entre l'anneau de représentations $R(G)$ du groupe G et le groupe de Grothendieck $K(Y)$ des fibrés vectoriels sur Y :

$$R(G) \xrightarrow{\sim} K(Y).$$

Généralisation de la correspondance de McKay

Jusqu'ici, tout a résulté d'études au cas par cas. On souhaite généraliser l'étude en dimension supérieure : G est un sous-groupe fini de $SL(n, \mathbf{C})$ et on s'intéresse à des résolutions projectives *crépantes* $Y \rightarrow \mathbf{C}^n/G$, *i.e.* à faisceau canonique trivial. Dans cette perspective, Nakamura [Nak01], Ito & Nakamura [IN96] et Ito & Nakajima [IN00] introduisent le *schéma de Hilbert de G -orbites régulières* $Y := G\text{-Hilb}(\mathbf{C}^n)$ paramétrant les sous-schémas $Z \subset \mathbf{C}^n$ de dimension 0, de longueur $|G|$, invariants sous l'action de G et tels que $H^0(\mathcal{O}_Z)$ est la représentation régulière de G . Ce schéma Y est muni d'une

famille universelle :

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{Z} & \\
 p \swarrow & & \searrow q \\
 Y & & \mathbf{C}^n \\
 \rho \searrow & & \swarrow \\
 & \mathbf{C}^n/G &
 \end{array}$$

Le morphisme p est plat de degré $|G|$ et le fibré vectoriel $R := p_*\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$ se décompose sous l'action de G sous la forme :

$$R = \bigoplus_{i=0}^k R_i \otimes V_i.$$

Pour $n = 2$, Ito & Nakamura observent que Y est exactement la résolution minimale de \mathbf{C}^2/G et les fibrés R_i sont précisément les fibrés de Gonzales-Sprinberg & Verdier. Suivant Ito & Nakajima [IN00] et Bridgeland, King & Reid [BKR01], on réalise la correspondance de McKay sous la forme d'une transformation de Fourier-Mukai au niveau des catégories dérivées :

$$\mathbf{R}q_* \circ p^* : D(\mathrm{Coh}(Y)) \longrightarrow D(\mathrm{Coh}_G(\mathbf{C}^n)).$$

Ce foncteur induit une application linéaire en K-théorie :

$$q_! \circ p^! : K(Y) \longrightarrow K_G(\mathbf{C}^n) \cong R(G)$$

telle que $q_! \circ p^!(R_k^*) = V_k$.

Le problème est de savoir si Y est le bon candidat :

Théorème (Bridgeland, King & Reid). — [BKR01] *Si le produit fibré $Y \times_{\mathbf{C}^n/G} Y \subset Y \times Y$ est de dimension inférieure ou égale à $n + 1$, alors Y est une résolution crépante de \mathbf{C}^n/G et $\mathbf{R}q_* \circ p^*$ induit une équivalence de catégories.*

Dans le cas plus particulier d'un espace vectoriel complexe V de dimension n muni d'une forme symplectique et pour un sous-groupe fini $G \subset Sp(V)$ d'automorphismes respectant cette forme symplectique, d'après Kaledin [Kal99, Kal02], les résolutions crépantes sont exactement les résolutions symplectiques. Bezrukavnikov & Kaledin [BK] ont alors démontré que, pour une telle résolution $Y \rightarrow V/G$, les catégories $D(\mathrm{Coh}(Y))$ et $D(\mathrm{Coh}_G(V))$ sont équivalentes.

Correspondance de McKay duale

Cette correspondance a été initiée par Ito & Reid [IR94] et Brylinski [Bry]. Nous présentons la généralisation due à Kaledin [Kal99, Kal02, Kal]. En toute généralité, si V est un espace vectoriel de dimension finie muni d'une action d'un groupe fini $G \subset GL(V)$, notons $X = V/G$ le quotient et supposons donnée une résolution projective $\rho : Y \rightarrow X$. L'espace vectoriel V est naturellement stratifié par les sous-espaces V^H de vecteurs H -invariants pour divers sous-groupes H de G , induisant une stratification X_H de X . On en déduit une stratification $Y_H := \rho^{-1}X_H$ de Y . Dans le contexte où V est un espace vectoriel symplectique, G un sous-groupe de $Sp(V)$ et $Y \rightarrow X$ une résolution projective symplectique, Kaledin montre que la résolution est semi-petite respectivement à cette stratification :

$$\mathrm{codim} Y_H \geq \frac{1}{2} \mathrm{codim} X_H.$$

De plus, les strates Z de dimension maximale (*i.e.* $\mathrm{codim} Z = \frac{1}{2} \mathrm{codim}(\rho(Z))$) donnent une base de l'homologie de Borel-Moore $H_*^{BM}(Y, \mathbf{C})$ indexée par les classes de conjugaison dans G . En notant $\mathcal{C}(G)$ l'espace des *fonctions classes* sur G (*i.e.* les fonctions sur G à valeurs complexes invariantes par conjugaison) on obtient une bijection :

$$H_*^{BM}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(G).$$

Correspondance de McKay multiplicative

Cette correspondance vise à décrire l'anneau de cohomologie (à coefficients rationnels ou complexes) $H^*(Y)$ à partir d'informations sur le groupe G . Une telle correspondance a été réalisée initialement par Lehn & Sorger [LS01] et Vasserot [Vas01] pour le schéma de Hilbert sur le plan affine et conjecturée par Ginzburg & Vasserot dans le cas général. Considérons la filtration croissante de l'algèbre du groupe G :

$$F^d \mathbf{C}[G] := \mathbf{C}\{g \in G \mid \mathrm{rg}(id_V - g) \leq d\}.$$

Cette filtration est compatible avec la multiplication de l'algèbre du groupe G . En se restreignant au centre ZG de l'algèbre, on obtient une structure d'algèbre graduée sur $\mathrm{gr}^F ZG$. On se place toujours dans le cadre symplectique :

Théorème (Ginzburg & Kaledin). — [GK04] *Soit $Y \rightarrow V/G$ une résolution projective crépante. Alors les algèbres graduées $H^*(Y)$ et $\mathrm{gr}^F ZG$ sont naturellement isomorphes.*

QUELQUES QUESTIONS

Parmi la quantité de questions ouvertes dans le domaine, nous nous intéressons à trois problèmes proposés par Nakajima et Ginzburg & Kaledin, que nous présentons dans leur cadre général.

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie muni d'une forme symplectique et $G \subset Sp(V)$ un sous-groupe fini d'automorphismes. Supposons donnée une résolution projective symplectique $Y \rightarrow V/G$.

(i) La correspondance de McKay classique donne une équivalence de catégories entre $D(\mathrm{Coh}(Y))$ et $D(\mathrm{Coh}_G(V))$. En passant aux groupes de Grothendieck on obtient un isomorphisme entre $K(Y)$ et $K_G(V) \cong R(G)$. Cet isomorphisme n'est pas compatible avec la structure d'anneau induite par le produit tensoriel de fibrés vectoriels.

Problème de la structure d'anneau. — (Nakajima [Nak96b, Question 4.23]) *Décrire le produit induit sur $R(G)$ par la correspondance de McKay.*

(ii) La correspondance de McKay duale donne un isomorphisme vectoriel entre $H_*^{BM}(Y)$ et $\mathcal{C}(G)$ et la correspondance de McKay multiplicative donne un isomorphisme d'anneaux entre $H^*(Y)$ et $\mathrm{gr}^F Z(G)$. La dualité de Poincaré fournit un isomorphisme naturel $D : H^*(Y) \rightarrow H_*^{BM}(Y)$.

Problème de la dualité de Poincaré. — (Ginzburg & Kaledin [GK04, Problème 1.4]) *Calculer l'application composée :*

$$\mathrm{gr}^F ZG \longrightarrow H^*(Y) \xrightarrow{D} H_*^{BM}(Y) \longrightarrow \mathcal{C}(G).$$

(iii) Le caractère de Chern donne un isomorphisme naturel d'anneaux $ch : K(Y) \rightarrow H^*(Y)$. L'espace $\mathcal{C}(G)$ des fonctions classes sur G est naturellement isomorphe à l'anneau $R(G)$ en associant à chaque représentation son caractère et on peut identifier canoniquement $\mathcal{C}(G)$ avec ZG .

Problème du caractère de Chern. — (Ginzburg & Kaledin [GK04, Problème 1.5]) *Calculer l'application composée :*

$$ZG \cong R(G) \cong K_G(V) \longrightarrow K(Y) \xrightarrow{ch} H^*(Y) \longrightarrow \mathrm{gr}^F ZG.$$

PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

Nous étudions séparément ces questions dans le cas du schéma de Hilbert de n points sur le plan affine, où nous pouvons calculer complètement les applications. Le groupe $G := S_n$ agit sur \mathbf{C}^n par permutation et on considère l'action induite sur l'espace vectoriel $V := \mathbf{C}^n \otimes \mathbf{C}^2$. Le schéma de Hilbert $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ fournit une désingularisation symplectique naturelle du quotient V/G , isomorphe au schéma d'orbites S_n - $\text{Hilb}(\mathbf{C}^{2n})$ (théorème de Haiman). La *correspondance de McKay* est réalisée par la transformation de Fourier-Mukai (théorème de Bridgeland, King & Reid) et des calculs précis peuvent être menés en utilisant des résultats de Haiman. La *correspondance de McKay multiplicative* est construite à partir des opérateurs de Nakajima sur l'espace total de cohomologie des schémas de Hilbert de points sur le plan affine et réalisée par le théorème de Lehn & Sorger ou Vasserot, tandis que la *correspondance de McKay généralisée* est réalisée par le choix d'une base naturelle de l'homologie donnée par certaines sous-variétés.

Dans ce cadre, modulo des isomorphismes naturels, nous pouvons remplacer les espaces ZS_n , $R(S_n)$ et $\mathcal{C}(S_n)$ par l'espace Λ^n des *fonctions symétriques de poids n* , défini comme le sous-espace vectoriel des polynômes de poids n de l'anneau Λ des polynômes en des indéterminées p_1, p_2, \dots telles que $\text{poids}(p_i) = i$. On dispose de bases naturelles indexées par les *partitions* λ de l'entier n , en particulier les *fonctions de Schur* s_λ qui correspondent aux représentations irréductibles et les *fonctions de Newton* p_λ qui correspondent aux classes de conjugaison. On introduit une graduation sur Λ^n en posant $\deg p_\lambda := n - l(\lambda)$ où $l(\lambda)$ désigne la *longueur* de la partition. Pour toute fonction symétrique $f \in \Lambda^n$, on note alors $[f]_k$ la composante homogène de degré k de f . On définit deux filtrations :

$$F^d \Lambda^n := \mathbf{Q}\{p_\lambda \mid \deg p_\lambda \leq d\} \text{ (filtration croissante),}$$

$$F_d \Lambda^n := \mathbf{Q}\{p_\lambda \mid \deg p_\lambda \geq d\} \text{ (filtration décroissante).}$$

La filtration croissante sert dans la construction de la structure d'anneau dans la correspondance de McKay multiplicative.

Nous nous intéressons tout d'abord à la question du caractère de Chern. L'anneau de K-théorie $K(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ admet une filtration topologique naturelle donnée par le support des faisceaux. Nos notations sont les suivantes (l'application Ψ est définie au §3.1.3 et l'application Θ au §3.3) :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^n & \xrightarrow{\Psi} & H^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \\ \uparrow \Gamma & & \uparrow ch \\ \Lambda^n & \xrightarrow{\Theta} & K(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \end{array}$$

Nous calculons explicitement l'application Γ et montrons qu'elle est compatible avec la filtration décroissante. Nous en déduisons alors le fait suivant :

Théorème. — *Le morphisme Θ (correspondance de McKay) est compatible avec la filtration topologique de la K -théorie et la filtration décroissante de l'anneau des fonctions symétriques.*

Il est alors naturel de passer aux gradués associés. Après graduation on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{gr}^F \Lambda^n & \xrightarrow{\Psi} & H^*(\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \\ \mathrm{gr} \Gamma \uparrow & & \uparrow \mathrm{gr} ch \\ \mathrm{gr}_F \Lambda^n & \xrightarrow{\mathrm{gr} \Theta} & \mathrm{gr} K(\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \end{array}$$

Dans ce diagramme, l'espace $\mathrm{gr}^F \Lambda^n$ désigne l'espace gradué relativement à la filtration croissante tandis que $\mathrm{gr}_F \Lambda^n$ correspond à la filtration décroissante. Ces deux espaces sont des espaces vectoriels gradués isomorphes (la base graduée ne change pas) mais nous notons $\mathrm{gr}^F \Lambda^n$ pour rappeler que la structure d'anneau faisant de Ψ un isomorphisme d'algèbres graduées se voit plus naturellement à partir de la filtration croissante.

Notons l'âge (ou *degré de décalage*) d'une partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ de n par $\mathrm{age}(\lambda) := n - l(\lambda)$ et définissons son *degré de complexité* par $\langle \lambda \rangle := \prod_{i \geq 1} \lambda_i$. Ces

définitions sont des cas particuliers de définitions générales associées à l'action d'un groupe G sur un espace vectoriel V : l'âge d'un élément $g \in G$ se lit dans la diagonalisation de l'endomorphisme tandis que le degré de complexité se calcule par la décomposition de Frobenius.

Nous commençons par calculer des formules explicites pour le morphisme Γ . Bien que ces formules soient assez compliquées, nous observons, en même temps que la compatibilité de Γ avec la filtration décroissante, que le morphisme $\mathrm{gr} \Gamma$ obtenu après graduation admet l'expression très simple suivante :

Théorème. — *Pour tout $p_\lambda \in \Lambda^n$ on a :*

$$(\mathrm{gr} \Gamma)(p_\lambda) = \frac{(-1)^{\mathrm{age}(\lambda)}}{\langle \lambda \rangle} p_\lambda.$$

L'ingrédient essentiel de nos calculs consiste en des formules combinatoires pour les classes de Chern de tous les fibrés vectoriels sur $\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ relevant l'action naturelle du tore \mathbf{C}^* :

Théorème. — Soit F un fibré \mathbf{C}^* -linéarisé de rang r sur $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ et $f_1^\lambda, \dots, f_r^\lambda$ les poids associés à l'action sur les fibres en chaque point fixe. Alors pour tout $k \geq 0$, la k -ième classe de Chern du fibré F vue dans Λ^n sous Ψ vaut :

$$c_k(F) = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)} \sigma_k(f_1^\lambda, \dots, f_r^\lambda) [s_\lambda]_k,$$

où les $\sigma_k(\cdot)$ désignent les fonctions symétriques élémentaires.

Le k -ième caractère de Chern du fibré F vaut :

$$ch_k(F) = \frac{1}{k!} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)} \sum_{i=1}^r (f_i^\lambda)^k [s_\lambda]_k.$$

Nous nous intéressons ensuite à la question de la dualité de Poincaré. Nos notations sont les suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^n & \xrightarrow{\phi} & H_*^{BM}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \\ \gamma \uparrow \text{.....} & & \uparrow D \\ \Lambda^n & \xrightarrow{\Psi} & H^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \end{array}$$

En choisissant convenablement les signes dans la définition de ϕ nous obtenons la formule suivante pour l'application γ :

Proposition. — Pour tout $p_\lambda \in \Lambda^n$ on a :

$$\gamma(p_\lambda) = \frac{(-1)^{\text{age}(\lambda)}}{\langle \lambda \rangle} p_\lambda.$$

Nous observons que cette application est exactement la même que l'application Γ obtenue à partir du caractère de Chern après graduation.

Ces résultats de comparaison des correspondances de McKay s'interprètent en disant qu'il y a une seule correspondance de McKay : la correspondance duale et la correspondance multiplicative sont les versions graduées de la correspondance classique. Précisément, nos formules montrent que l'isomorphisme $\mathcal{C}(S_n) \cong K(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ donné par la correspondance de McKay est compatible avec les filtrations naturelles. En passant aux gradués associés on obtient un isomorphisme $\text{gr}_F \mathcal{C}(S_n) \cong \text{gr } K(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \cong H^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$. Alors l'isomorphisme induit sur les espaces vectoriels duaux $H_*^{BM}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \cong ZS_n$ est la correspondance de McKay duale (quitte à bien normaliser). La correspondance de McKay multiplicative est elle aussi la même, avec une normalisation différente des vecteurs permettant de décrire plus naturellement la structure d'anneau.

Parallèlement à cette question, nous nous intéressons à la structure d'anneau induite par la correspondance de McKay (le morphisme Θ), avant le passage à la graduation qui nettoie complètement ce produit. En notant B_n le fibré tautologique sur $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$, nous obtenons le résultat suivant, qui se révèle analogue pour la K-théorie au résultat de Lehn sur l'action en cohomologie du caractère de Chern du fibré B_n (voir la définition de l'opérateur \mathcal{D} et le théorème 5.3.4) :

Théorème. — *Soit l'opérateur différentiel sur Λ :*

$$\mathcal{E} = \left(\sum_{r \geq 1} r p_r t^r \right) \exp \left(\sum_{r \geq 1} \frac{\partial}{\partial p_r} t^{-r} \right) \Big|_{t^0}.$$

Alors on a dans $K(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$:

$$B_n \otimes \Theta(y) = \Theta(\mathcal{E}(y)) \quad \forall y \in \Lambda^n.$$

Nous nous intéressons ensuite aux formules génératrices pour les classes caractéristiques des fibrés vectoriels usuels sur les schémas de Hilbert de points sur des surfaces projectives. Nous démontrons des formules d'universalité que nous utilisons pour démontrer la formule suivante donnant les classes de Chern du fibré tangent au schéma de Hilbert de points sur le plan affine :

Théorème. — *Les classes de Chern du fibré tangent au schéma $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ sont données par la série génératrice :*

$$\sum_{n \geq 0} c_{\text{tot}}(T \text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) = \exp \left(\sum_{k \geq 0} (-1)^k C_k \frac{p_{2k+1}}{2k+1} \right),$$

où $C_k := \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$ est le k -ième nombre de Catalan.

Son caractère de Chern est donné par la série génératrice :

$$\sum_{n \geq 0} ch(T \text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) = 2e^{p_1} \sum_{k \geq 0} \frac{p_{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

PRÉSENTATION DU PLAN

Les chapitres 1 et 2 contiennent des rappels sur les fonctions symétriques, les polynômes de Macdonald et les substitutions pléthystiques, avec lesquels nous menons les calculs.

Le chapitre 3 rappelle les notions utiles sur le schéma de Hilbert de points, le schéma de Hilbert isospectral et le schéma de Hilbert d'orbites.

Le chapitre 4 explique comment calculer les classes de Chern et le caractère de Chern de tout fibré sur le schéma de Hilbert de points sur le plan affine lorsqu'il existe une linéarisation naturelle de ce fibré pour l'action naturelle du tore.

Le chapitre 5 s'intéresse à l'action d'un fibré par produit tensoriel en K-théorie en déterminant l'opérateur qui résulte après application de la correspondance de McKay.

Le chapitre 6 traite les problèmes de la dualité de Poincaré et du caractère de Chern, en calculant explicitement les applications, puis démontre le théorème de comparaison des trois correspondances de McKay étudiées.

Le chapitre 7 rappelle la structure d'algèbre vertex sur l'espace total de cohomologie des schémas de Hilbert de points sur une surface projective, présente divers opérateurs et des résultats d'universalité s'y rapportant. A titre d'illustration de ces résultats, nous détaillons ensuite quelques séries génératrices de classes de Chern et de caractères de Chern du fibré tautologique sur le schéma de Hilbert de points sur le plan affine, pour la plupart bien connues et redémontrées en utilisant les résultats du chapitre 4. Nous démontrons ensuite la formule donnant la série génératrice des classes de Chern du fibré tangent.

Les appendices A,B,C présentent quelques rappels d'homologie et cohomologie, d'homologie et cohomologie équivariantes puis de K-théorie. L'appendice D expose quelques propriétés du degré de complexité dans le cas du groupe symétrique, l'appendice E dresse quelques carquois de McKay pour le groupe symétrique.

CHAPITRE 1

FONCTIONS SYMÉTRIQUES

Nous présentons quelques notions sur les fonctions symétriques et les représentations du groupe symétrique. Cette présentation suit Manivel [Man98] et Macdonald [Mac91, Mac79], à l'exception des substitutions pléthystiques où nous suivons Haiman [Hai99]. Nous travaillons directement sur le corps des nombres rationnels.

1.1. L'algèbre des fonctions symétriques

Soit x_1, \dots, x_r des indéterminées indépendantes. Le groupe symétrique S_r agit sur l'anneau de polynômes $\mathbf{Q}[x_1, \dots, x_r]$ en permutant les indéterminées et l'ensemble des invariants est noté :

$$\Lambda_r := \mathbf{Q}[x_1, \dots, x_r]^{S_r},$$

appelé *algèbre des polynômes symétriques en les indéterminées x_1, \dots, x_r* . Tout élément $f \in \Lambda_r$ se décompose sous la forme :

$$f = \sum_{n \geq 0} f^{(n)},$$

où $f^{(n)}$ est la composante homogène de degré n du polynôme f . Chaque $f^{(n)}$ est lui-même un polynôme symétrique et Λ_r est une \mathbf{Q} -algèbre *graduée* :

$$\Lambda_r = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda_r^n,$$

où Λ_r^n est le sous-espace vectoriel formé des polynômes symétriques homogènes de degré n en les indéterminées x_1, \dots, x_r .

Si l'on adjoit d'autres indéterminées $x_{r+1}, \dots, x_{r'}$ pour $r' > r$, on peut former l'algèbre $\Lambda_{r'}$ disposant d'un morphisme surjectif d'algèbres graduées :

$$\rho_{r',r} : \Lambda_{r'} \rightarrow \Lambda_r,$$

obtenu en posant $x_{r+1} = \dots = x_{r'} = 0$. Les applications restreintes $\Lambda_{r'}^n \rightarrow \Lambda_r^n$ sont surjectives pour tout n et on construit successivement :

$$\begin{aligned} \Lambda^n &:= \varprojlim \Lambda_r^n, \\ \Lambda &:= \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n. \end{aligned}$$

L'algèbre graduée Λ est appelée *algèbre des fonctions symétriques*.

Si A est une \mathbf{Q} -algèbre commutative, les algèbres de fonctions symétriques à coefficients dans A sont obtenues par changement de base :

$$\begin{aligned} \Lambda_A^n &:= \Lambda^n \otimes_{\mathbf{Q}} A, \\ \Lambda_A &:= \Lambda \otimes_{\mathbf{Q}} A. \end{aligned}$$

1.2. Partitions d'un entier

Une *partition* d'un entier n est une suite décroissante d'entiers positifs ou nuls :

$$\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0),$$

telle que $n = \sum_{i=1}^k \lambda_i$, ce que nous écrirons par : $\lambda \vdash n$. Les entiers λ_i sont appelés les *parts* de la partition. Si besoin, nous prolongerons les partitions par des parts nulles. Le nombre de parts non nulles, noté $l(\lambda)$, est appelé la *longueur* de la partition. La somme des parts, notée $|\lambda|$, est appelée le *poids* de la partition. Si la partition λ a α_1 parts égales à 1, α_2 parts égales à 2 *etc.* nous la noterons aussi sous la forme :

$$\lambda = (1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \dots).$$

Nous utiliserons aussi le nombre suivant :

$$n(\lambda) := \sum_{i \geq 1} (i-1)\lambda_i.$$

Le *diagramme de Young* de λ est défini par :

$$D(\lambda) := \{(i, j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid j < \lambda_{i+1}\}.$$

Dans la représentation d'un tel diagramme, nous adoptons la convention matricielle : l'indice i est l'indice de ligne et l'indice j est l'indice de colonne, en

commençant toutefois en $(0, 0)$. Pour une cellule $x = (i, j) \in D(\lambda)$, on appelle *bras* le nombre $a(x)$ de cellules à droite de x , *jambe* le nombre $l(x)$ de cellules au-dessous de x , *longueur d'équerre* le nombre $h(x) := 1 + a(x) + l(x)$ et *contenu* le nombre $c(x) := j - i$. Par exemple :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & x & a & a \\ \hline & l & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \lambda = (4, 3, 1) \\ |\lambda| = 8 \\ l(\lambda) = 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} x = (0, 1) \\ a(x) = 2 \quad l(x) = 1 \\ h(x) = 4 \quad c(x) = 1 \end{array}$$

Pour une partition λ , on note λ' la partition *conjuguée* obtenue par symétrie sur le diagramme de Young. Par exemple :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \\ \lambda = (3, 3, 1) \quad \lambda' = (3, 2, 2)$$

Soit \mathcal{P} l'ensemble de toutes les partitions d'entiers et \mathcal{P}_n l'ensemble des partitions de poids n . L'ensemble \mathcal{P} est muni de la relation d'ordre partiel *dominant* défini par :

$$\lambda \geq \mu \Leftrightarrow |\lambda| = |\mu| \text{ et } \lambda_1 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \dots + \mu_i \text{ pour tout } i \geq 1.$$

Proposition 1.2.1. — [Mac79, I-(1.11)] *Pour toutes partitions λ, μ on a :*

$$\lambda \geq \mu \Leftrightarrow \lambda' \leq \mu'.$$

1.3. Fonctions symétriques usuelles

Nous reprenons la définition de certaines familles de fonctions symétriques indexées par les partitions que nous utiliserons dans la suite.

1.3.1. Fonctions monomiales. — Soit une partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ et un entier $r \geq l(\lambda)$. Quitte à prolonger λ par des parts nulles, on peut définir le monôme :

$$x^\lambda := x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_r^{\lambda_r}.$$

Le *polynôme symétrique monomial* m_λ est la somme de tous les monômes distincts que l'on peut obtenir en permutant les indéterminées :

$$\begin{aligned} m_\lambda(x_1, \dots, x_r) &:= \sum_{\nu \in S_r \cdot \lambda} x^\nu \\ &= \frac{1}{\text{Card}\{\sigma \in S_r \mid \sigma \cdot \lambda = \lambda\}} \sum_{\sigma \in S_r} x_1^{\lambda_{\sigma(1)}} \dots x_r^{\lambda_{\sigma(r)}}, \end{aligned}$$

où $S_r.\lambda$ désigne l'orbite du r -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ sous l'action par permutation du groupe symétrique.

Cette définition est compatible avec le système projectif : pour tout $r' > r$ on a $\rho_{r',r} m_\lambda(x_1, \dots, x_{r'}) = m_\lambda(x_1, \dots, x_r)$ ce qui définit par passage à la limite projective un élément $m_\lambda \in \Lambda$ appelé *fonction monomiale*.

Proposition 1.3.1. —

- (i) *Les fonctions monomiales forment une base de l'algèbre des fonctions symétriques.*
- (ii) *Les fonctions monomiales m_λ pour les partitions λ de poids n forment une base de Λ^n .*

1.3.2. Fonctions de Newton. — On définit similairement la k -ième somme de puissances par :

$$p_k := \sum_{i \geq 1} x_i^k.$$

Pour toute partition $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots)$ on appelle alors *fonction de Newton* le produit :

$$p_\lambda := p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots \in \Lambda^{|\lambda|}.$$

Théorème 1.3.2. — [Mac79, I-(2.12)]

- (i) *Les fonctions de Newton forment une base de l'algèbre des fonctions symétriques.*
- (ii) *Les fonctions de Newton p_λ pour les partitions de poids n forment une base de Λ^n .*

L'observation suivante reviendra dans l'étude de la cohomologie équivariante du schéma de Hilbert de points sur le plan affine :

Lemme 1.3.3. — *Soit une partition $\lambda = (1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \dots)$. Dans la décomposition de la fonction monomiale m_λ dans la base des fonctions de Newton, le coefficient devant p_λ est $\frac{1}{\prod_{i \geq 1} \alpha_i!}$ et toute autre fonction p_μ intervenant correspond à une partition de longueur strictement inférieure à celle de λ .*

Démonstration. — Travaillons avec $r = l(\lambda)$ indéterminées. Avec les notations précédentes on observe que :

$$\text{Card}\{\sigma \in S_r \mid \sigma.\lambda = \lambda\} = \prod_{i \geq 1} \alpha_i!$$

ce qui fait que :

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i \geq 1} \alpha_i! \right) m_\lambda &= \sum_{\sigma \in S_r} x_1^{\lambda_{\sigma(1)}} \cdots x_r^{\lambda_{\sigma(r)}} \\ &= (x_1^{\lambda_1} + \cdots + x_r^{\lambda_1})(x_1^{\lambda_2} + \cdots + x_r^{\lambda_2}) \cdots - \text{monômes excessifs} \\ &= p_\lambda - \text{monômes excessifs.} \end{aligned}$$

Les monômes en excès sont obtenus dans le développement de la fonction de Newton lorsqu'on a choisi plusieurs fois la même indéterminée dans les différents facteurs. Ces monômes font donc intervenir au plus $r - 1$ indéterminées à la fois et se codent avec des fonctions de Newton p_μ pour des partitions μ de longueur au plus $r - 1$. \square

Nous noterons $\omega : \Lambda \rightarrow \Lambda$ l'isomorphisme d'algèbre involutif caractérisé par $\omega p_k = -p_k$.

1.3.3. Fonctions de Schur. — Prenons r indéterminées x_1, \dots, x_r . Pour toute suite d'entiers positifs $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ nous posons $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_r^{\alpha_r}$. On définit :

$$\begin{aligned} a_\alpha &:= \det (x_i^{\alpha_j})_{1 \leq i, j \leq r} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)}^{\alpha_1} \cdots x_{\sigma(r)}^{\alpha_r}, \end{aligned}$$

où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ . En particulier, lorsque $\delta = (r - 1, r - 2, \dots, 1, 0)$, a_δ est le déterminant de Vandermonde :

$$a_\delta = \prod_{1 \leq i < j \leq r} (x_j - x_i).$$

On observe que a_α change de signe si l'on échange deux des α_i et en particulier a_α est nul si deux des α_i sont égaux. On peut donc se restreindre à considérer des suites α telles que $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_r \geq 0$ et écrire $\alpha_i = \lambda_i + r - i$ pour $i = 1, \dots, r$ de telle sorte que $\alpha = \lambda + \delta$ où $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ est une partition de longueur au plus r . Puisque a_α s'annule dès que deux des x_i sont égaux, a_α est divisible par le déterminant de Vandermonde a_δ dans l'anneau $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_r]$ et le quotient :

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_r) := \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}$$

est un polynôme symétrique de degré $|\lambda|$. Si l'on passe à $r + 1$ indéterminées, on vérifie que $s_\lambda(x_1, \dots, x_r, 0) = s_\lambda(x_1, \dots, x_r)$. On peut donc définir une limite projective $s_\lambda \in \Lambda$ appelée *fonction de Schur*.

Théorème 1.3.4. — [Mac79, I-(3.3)]

(i) Les fonctions de Schur forment une base de l'algèbre des fonctions symétriques.

(ii) Les fonctions de Schur s_λ pour les partitions de poids n forment une base de Λ^n .

La formule suivante nous servira lors du calcul des classes de Chern du fibré tautologique sur le schéma de Hilbert de points du plan affine :

Proposition 1.3.5. — [Man98, Corollaire 1.4.11] Soit λ une partition. Pour $r \geq l(\lambda)$ on a par évaluation en $x_1 = \dots = x_r = 1$ et $x_i = 0$ pour $i > r$:

$$s_\lambda(\underbrace{1, \dots, 1}_r, 0, \dots) = \prod_{x \in D(\lambda)} \frac{r + c(x)}{h(x)}.$$

1.4. Relation avec les représentations du groupe symétrique

Nous les ponts naturels entre les représentations du groupe symétrique, les caractères et les fonctions symétriques.

1.4.1. Produit scalaire sur l'algèbre des fonctions symétriques. —

Pour toute partition $\lambda = (1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \dots)$ on pose :

$$z_\lambda := \prod_{r \geq 1} \alpha_r! r^{\alpha_r}.$$

On définit un produit scalaire sur Λ par :

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = \delta_{\lambda, \mu} z_\lambda \quad \forall \lambda, \mu,$$

où $\delta_{\lambda, \mu}$ désigne le symbole de Kronecker.

Proposition 1.4.1. — [Mac79, I-(4.8)] La base des fonctions de Schur est orthonormée :

$$\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda, \mu} \quad \forall \lambda, \mu.$$

1.4.2. Représentations et caractères du groupe symétrique. —

Soit $\mathcal{C}(S_n)$ l'espace vectoriel sur \mathbf{Q} des *fonctions classes* sur le groupe symétrique S_n : ce sont les fonctions $f : S_n \rightarrow \mathbf{Q}$ constantes sur les classes de conjugaison dans S_n . Ces classes de conjugaison sont en bijection avec les partitions de l'entier n , en associant à toute permutation la liste des longueurs des cycles qui interviennent dans sa décomposition en cycles disjoints. Si λ est une partition de n , nous notons χ_λ la fonction classe qui vaut 1 sur la classe de conjugaison

associée à λ et 0 sur les autres classes. La famille des fonctions χ_λ forme une base de $\mathcal{C}(S_n)$. Soit $R(S_n)$ l'algèbre sur \mathbf{Q} des représentations du groupe S_n , le produit étant induit par le produit tensoriel de représentations.

L'application *caractère* est l'isomorphisme⁽¹⁾ :

$$\chi : R(S_n) \rightarrow \mathcal{C}(S_n)$$

obtenu en associant à chaque représentation son caractère.

Le *morphisme de Frobenius* est l'isomorphisme :

$$\Phi : \mathcal{C}(S_n) \rightarrow \Lambda^n$$

caractérisé par :

$$\Phi(\chi_\lambda) = z_\lambda^{-1} p_\lambda.$$

Notons χ^λ les fonctions classes telles que $\Phi(\chi^\lambda) = s_\lambda$, χ_μ^λ la valeur de la fonction χ^λ sur la classe de conjugaison μ et V^λ la représentation (*a priori* virtuelle) du groupe S_n de caractère χ^λ .

Proposition 1.4.2 (Formules des caractères). — [Man98, §1.6.4] *Les représentations V^λ de caractère χ^λ sont les représentations irréductibles de S_n . On a les formules de changement de base dans Λ^n :*

$$\begin{aligned} p_\mu &= \sum_{\lambda \vdash n} \chi_\mu^\lambda s_\lambda \text{ (formule de Frobenius),} \\ s_\lambda &= \sum_{\mu \vdash n} z_\mu^{-1} \chi_\mu^\lambda p_\mu \text{ (formule de Frobenius inverse).} \end{aligned}$$

1.5. Substitutions pléthystiques

Pour effectuer des substitutions pléthystiques, nous utilisons la description de l'algèbre Λ comme algèbre des polynômes en les sommes de puissances :

$$\Lambda = \mathbf{Q}[p_1, p_2, \dots].$$

Soit $f = F(p_1, p_2, \dots) \in \Lambda$ et $E(t_1, t_2, \dots)$ une série de Laurent formelle. On appelle *substitution pléthystique de E dans f* la série de Laurent formelle notée $f[E]$ définie par :

$$f[E] = F(E(t_1, t_2, \dots), E(t_1^2, t_2^2, \dots), \dots)$$

ce qui signifie que l'on remplace chaque p_k par $E(t_1^k, t_2^k, \dots)$ dans la décomposition de f .

⁽¹⁾Pour un groupe général G fini, l'application caractère $\chi : R(G) \rightarrow \mathcal{C}(G)$ n'est un isomorphisme qu'après extension des scalaires à \mathbf{C} ; le cas du groupe symétrique est particulier.

Autrement dit, l'identification $\Lambda \cong \mathbf{Q}[p_1, p_2, \dots]$ permet de spécialiser les p_k sur des éléments de n'importe quelle \mathbf{Q} -algèbre : la spécialisation s'étend de manière unique en un morphisme d'algèbre sur Λ . Pour une série formelle E en des indéterminées t_1, t_2, \dots , on définit $p_k[E]$ comme la série obtenue en remplaçant chaque indéterminée t_i par t_i^k et par extension de la spécialisation à toute fonction symétrique $f \in \Lambda$ on définit $f[E]$. Nous conviendrons que, dans une substitution pléthystique, X désigne la somme des indéterminées *originelles* $x_1 + x_2 + \dots$, de telle sorte que $p_k[X] = p_k$.

Exemples 1.5.1. —

- $p_k[X(1-t)] = (1-t^k)p_k$;
- $p_\ell[p_k] = p_{\ell k}$;
- $p_\lambda[tX] = t^{|\lambda|}p_\lambda$.

Remarquons cette subtilité : $p_k[tX] = t^k X$ tandis que $p_k[-X] = -p_k$. Ainsi, il faut se garder d'évaluer en $t = -1$.

La substitution pléthystique induit une application $\Lambda \times \Lambda \rightarrow \Lambda$ définie par $(f, g) \mapsto f[g]$.

Proposition 1.5.1. — [Mac79, §I.8]

(i) Pour tout $g \in \Lambda$, l'application $f \mapsto f[g]$ est compatible avec la somme et le produit :

$$\begin{aligned} (f+h)[g] &= f[g] + h[g], \\ (fh)[g] &= (f[g])(h[g]). \end{aligned}$$

(ii) Pour tout $n \geq 1$, l'application $g \mapsto p_n[g]$ est compatible avec la somme et le produit :

$$\begin{aligned} p_n[f+g] &= p_n[f] + p_n[g], \\ p_n[fg] &= p_n[f]p_n[g]. \end{aligned}$$

(iii) Le pléthysme est associatif :

$$f[g[h]] = (f[g])[h] \quad \forall f, g, h \in \Lambda.$$

Par contre, en général $f[g+h] \neq f[g] + f[h]$.

Il sera utile de poser $p_0 = 1$ et de convenir que :

$$p_0[f] = 1 \quad \forall f \in \Lambda.$$

CHAPITRE 2

POLYNÔMES DE MACDONALD

Nous reprenons brièvement la présentation des polynômes de Macdonald ([Mac91, Mac79]) donnée par Haiman [Hai99, Hai03].

2.1. L'algèbre $\Lambda_{\mathbf{Q}(q,t)}$

On étend les scalaires sur les fonctions symétriques au corps de fractions rationnelles $\mathbf{Q}(q, t)$:

$$\Lambda_{\mathbf{Q}(q,t)} := \Lambda \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(q, t).$$

La substitution pléthystique s'étend naturellement à ce cadre, mais les substitutions pourront faire intervenir les indéterminées q, t . Le produit scalaire est étendu par $\mathbf{Q}(q, t)$ -bilinearité.

Pour toute partition λ , à partir du diagramme de Young $D(\lambda)$ on définit le polynôme :

$$B_{\lambda}(q, t) := \sum_{(i,j) \in D(\lambda)} t^i q^j,$$

qui est la somme des monômes dans le remplissage du diagramme :

$$\lambda = (4, 2, 1) : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & q & q^2 & q^3 \\ \hline t & tq & & \\ \hline t^2 & & & \\ \hline \end{array}$$

On définit aussi la série formelle :

$$\Omega := \exp \left(\sum_{k \geq 1} \frac{p_k}{k} \right).$$

Pour toutes séries formelles A, B on observe les formules :

$$\begin{aligned}\Omega[A + B] &= \Omega[A]\Omega[B], \\ \Omega[-A] &= \frac{1}{\Omega[A]}.\end{aligned}$$

2.2. Polynômes de Macdonald

Soit $\Delta' : \Lambda_{\mathbf{Q}(q,t)} \rightarrow \Lambda_{\mathbf{Q}(q,t)}$ l'opérateur $\mathbf{Q}(q, t)$ -linéaire défini par :

$$\Delta' f = f \left[X - \frac{1-q}{z} \right] \Omega[zX(1-t^{-1})] \Big|_{z^0}.$$

Proposition 2.2.1. — [Hai99, Proposition 2.2] *Pour toute partition λ on a :*

$$\Delta' m_\lambda = (1 - (1-q)(1-t^{-1})B_\lambda(q, t^{-1}))m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} b_{\lambda, \mu} m_\mu$$

pour certains coefficients $b_{\lambda, \mu} \in \mathbf{Q}(q, t)$.

La forme triangulaire de l'opérateur Δ' conduit à la définition des polynômes de Macdonald :

Définition 2.2.2. — On appelle *polynôme de Macdonald* P_λ la fonction propre de l'opérateur Δ' restreint à $\Lambda_{\mathbf{Q}(q,t)}^{|\lambda|}$ telle que :

$$\Delta' P_\lambda = (1 - (1-q)(1-t^{-1})B_\lambda(q, t^{-1}))P_\lambda,$$

normalisée de telle sorte que :

$$P_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} c_{\lambda, \mu} m_\mu,$$

avec $c_{\lambda, \mu} \in \mathbf{Q}(q, t)$.

2.3. Polynômes de Macdonald modifiés

La *forme intégrale* des polynômes de Macdonald est définie par :

$$J_\lambda := \left(\prod_{x \in D(\lambda)} (1 - q^{a(x)} t^{1+l(x)}) \right) P_\lambda.$$

Les polynômes de Macdonald *modifiés* sont alors donnés par :

$$H_\lambda := J_\lambda \left[\frac{X}{1-t} \right],$$

$$\tilde{H}_\lambda := t^{n(\lambda)} H_\lambda(q, t^{-1}).$$

Proposition 2.3.1. — [Hai99, Proposition 2.6] *Les polynômes \tilde{H}_μ sont caractérisés par les trois conditions :*

- (H1) pour tout μ , $\tilde{H}_\mu[X(1-q)] \in \mathbf{Q}(q, t)\{s_\lambda \mid \lambda \geq \mu\}$,
- (H2) pour tout μ , $\tilde{H}_\mu[X(1-t)] \in \mathbf{Q}(q, t)\{s_\lambda \mid \lambda \geq \mu'\}$,
- (H3) pour tout μ , $\langle \tilde{H}_\mu, s_{(n)} \rangle = 1$.

Nous utiliserons la formule suivante au §6.2.2 :

Proposition 2.3.2. — [Hai03, Proposition 3.5.10] *L'évaluation du polynôme de Macdonald \tilde{H}_μ en $t = 1/q$ donne :*

$$\tilde{H}_\mu(q, q^{-1}) = q^{-n(\mu)} \prod_{x \in D(\mu)} (1 - q^{h(x)})_{s_\mu} \left[\frac{X}{1-q} \right].$$

Soit $\Delta : \Lambda_{\mathbf{Q}(q,t)} \rightarrow \Lambda_{\mathbf{Q}(q,t)}$ l'opérateur $\mathbf{Q}(q, t)$ -linéaire défini par :

$$\Delta \tilde{H}_\lambda = (1 - (1-q)(1-t)B_\lambda(q, t)) \tilde{H}_\lambda.$$

Proposition 2.3.3. — [Hai99, Proposition 2.4] *L'opérateur Δ est donné par la formule :*

$$\Delta f = f \left[X + \frac{(1-t)(1-q)}{z} \right] \Omega[-zX] \Big|_{z^0}.$$

Proposition 2.3.4. — [Hai03, §3.5 formule (53)] *Les polynômes \tilde{H}_μ vérifient la dualité :*

$$\langle \tilde{H}_\mu, \omega \tilde{H}_\lambda[X(1-q)(1-t)] \rangle = \delta_{\lambda, \mu} a_\lambda,$$

pour certains $a_\lambda \in \mathbf{Q}(q, t)$ non nuls.

Les polynômes \tilde{H}_μ se décomposent dans la base des fonctions de Schur sous la forme :

$$\tilde{H}_\mu = \sum_{\lambda \vdash n} \tilde{K}_{\lambda, \mu} s_\lambda,$$

pour certains $\tilde{K}_{\lambda, \mu} \in \mathbf{Q}(q, t)$ appelés *q, t -polynômes de Kostka*, pour la raison suivante :

Théorème 2.3.5 (Conjectures de Macdonald). — [Hai01a, Théorème 3.2] *Les coefficients $\tilde{K}_{\lambda,\mu}$ sont des polynômes en q, t à coefficients entiers positifs ou nuls : $\tilde{K}_{\lambda,\mu} \in \mathbf{N}[q, t]$.*

CHAPITRE 3

SCHÉMAS DE HILBERT SUR LE PLAN AFFINE

3.1. Schéma de Hilbert de points

3.1.1. Définition du schéma $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$. — Le *schéma de Hilbert de n points sur le plan affine* est la variété paramétrant les sous-schémas du plan \mathbf{C}^2 de dimension nulle et de longueur n . On peut l'obtenir par la construction de Grothendieck [Gro61] comme le schéma quasi-projectif représentant le foncteur paramétrant les familles plates de sous-schémas du plan de polynôme de Hilbert constant de valeur n . Soit $\Xi_n \subset \text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2) \times \mathbf{C}^2$ le sous-schéma universel et $B_n := pr_{1*}\mathcal{O}_{\Xi_n}$ l'image directe du faisceau structural par la projection sur le premier facteur. C'est un faisceau localement libre de rang n et on note encore B_n le fibré vectoriel associé, dénommé *fibré tautologique* sur $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$. Le schéma $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ admet une description ensembliste très simple :

$$\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2) = \{I \text{ idéal de } \mathbf{C}[x, y] \text{ tel que } \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[x, y]/I = n\}.$$

Théorème 3.1.1 (Fogarty). — [Fog68] *Le schéma de Hilbert $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ est lisse et connexe de dimension $2n$.*

Soit $S^n\mathbf{C}^2$ le quotient de Mumford de $(\mathbf{C}^2)^n$ pour l'action du groupe symétrique S_n par permutation. Le *morphisme de Hilbert-Chow* :

$$\rho : \text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2) \rightarrow S^n\mathbf{C}^2$$

est défini ensemblistement par :

$$\rho(Z) = \sum_{x \in Z} \dim_{\mathbf{C}}(\mathcal{O}_{Z,x})x.$$

Théorème 3.1.2 (Fogarty). — [Fog68] *L'application de Hilbert-Chow ρ induit un morphisme projectif de variétés algébriques. C'est une résolution des singularités.*

Nous étudions la topologie de $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ en considérant sa structure réelle sous-jacente de dimension $4n$. D'après Ellingsrud & Strømme [ES87], sa cohomologie singulière impaire est nulle et sa cohomologie paire est sans torsion, engendrée par des cycles algébriques. On note $H^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ son anneau de cohomologie singulière à coefficients rationnels, la structure d'anneau étant donnée par le produit *cup*. On note $K(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ le groupe de Grothendieck à coefficients rationnels des fibrés vectoriels algébriques sur $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$, que l'on munit de la structure d'anneau induite par le produit tensoriel de fibrés vectoriels. Puisque la variété $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ est lisse et quasi-projective, c'est aussi le groupe de Grothendieck des faisceaux algébriques cohérents sur $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$. Le caractère de Chern $ch : K(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \rightarrow H^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ induit un isomorphisme d'anneaux.

Nous utiliserons l'observation suivante au §6.2 :

Théorème 3.1.3 (Beauville). — [Nak96b, Théorème 1.10] *La forme symplectique naturelle sur \mathbf{C}^2 induit une structure symplectique sur $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$.*

3.1.2. Stratification. — Pour toute partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ de n , considérons le sous-ensemble de $S^n \mathbf{C}^2$ défini par :

$$S_\lambda \mathbf{C}^2 := \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \mid x_i \neq x_j \text{ pour } i \neq j \right\}.$$

On constate que :

$$S^n \mathbf{C}^2 = \coprod_{\lambda \vdash n} S_\lambda \mathbf{C}^2.$$

Proposition 3.1.4. — [Nak96b, §6.2] *Chaque strate $S_\lambda \mathbf{C}^2$ est une sous-variété localement fermée de $S^n \mathbf{C}^2$, lisse et connexe de dimension $2l(\lambda)$.*

On observe que :

$$\overline{S_\lambda \mathbf{C}^2} = \coprod_{\mu} S_\mu \mathbf{C}^2,$$

où la réunion porte sur les partitions μ que l'on peut obtenir depuis λ en remontant des lignes dans le diagramme de Young de λ . Ces propriétés justifient le terme de *stratification* pour cette décomposition de $S^n \mathbf{C}^2$.

Pour toute partition λ de n , posons :

$$X_\lambda := \rho^{-1} S_\lambda \mathbf{C}^2,$$

et notons $\rho_\lambda : X_\lambda \rightarrow S_\lambda \mathbf{C}^2$ la restriction du morphisme de Hilbert-Chow.

Proposition 3.1.5. — [Nak96b, §6.2] *Le morphisme $\rho_\lambda : X_\lambda \rightarrow S_\lambda \mathbf{C}^2$ est une fibration localement triviale pour la topologie forte.*

On appelle *schéma de Hilbert ponctuel* la fibre du morphisme de Hilbert-Chow à l'origine :

$$H_n = \rho^{-1}(n \cdot (0, 0)).$$

Théorème 3.1.6 (Briançon). — [Bri02] *Le schéma de Hilbert ponctuel H_n est irréductible de dimension $n - 1$.*

On en déduit aisément la dimension des strates :

Proposition 3.1.7. — *Les sous-variétés X_λ sont irréductibles et localement fermées de dimension $n + l(\lambda)$.*

Nous aurons besoin d'interpréter les résultats précédents dans le contexte plus général suivant :

Définition 3.1.8. — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme projectif de variétés complexes. Supposons que Y admet une stratification en sous-variétés localement fermées $Y = \coprod_{\alpha} Y_{\alpha}$ et notons $X_{\alpha} := f^{-1}(Y_{\alpha})$. Supposons que pour tout α , la restriction $f_{\alpha} : X_{\alpha} \rightarrow Y_{\alpha}$ est une fibration localement triviale pour la topologie forte, de fibre F_{α} . Alors f est dit *strictement semi-petit* pour cette stratification si :

$$2 \dim F_{\alpha} = \operatorname{codim} Y_{\alpha} \quad \forall \alpha.$$

Les résultats précédents se redisent alors sous la forme suivante :

Proposition 3.1.9. — [Nak96b, Lemme 6.10] *Le morphisme de Hilbert-Chow $\rho : \operatorname{Hilb}^n(\mathbf{C}^2) \rightarrow S^n \mathbf{C}^2$ est strictement semi-petit pour la stratification par les sous-variétés $S_{\lambda} \mathbf{C}^2$. De plus, les fibres de ρ sont irréductibles.*

3.1.3. Opérateurs de Nakajima. — Nakajima [Nak97] et Grojnowski [Gro61] construisent un isomorphisme vectoriel :

$$\Psi : \Lambda^n \longrightarrow H^*(\operatorname{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)),$$

en définissant des opérateurs géométriques sur la somme totale de cohomologie des schémas de Hilbert $\operatorname{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ pour tout n . Rappelons les grandes lignes de la construction de Nakajima⁽¹⁾. Pour tout $i \geq 1$, soit :

$$X_{n,i} \subset \operatorname{Hilb}^n(\mathbf{C}^2) \times \operatorname{Hilb}^{n+i}(\mathbf{C}^2)$$

⁽¹⁾L'appendice A contient quelques détails sur les notations utilisées en cohomologie.

la sous-variété des couples $(\xi, \xi') \in \text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2) \times \text{Hilb}^{n+i}(\mathbf{C}^2)$ tels que ξ est un sous-schéma fermé de ξ' et ξ, ξ' diffèrent d'un point de multiplicité i . Soit π_n la projection de $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2) \times \text{Hilb}^{n+i}(\mathbf{C}^2)$ sur $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ et π_{n+i} la projection de $X_{n,i}$ sur $\text{Hilb}^{n+i}(\mathbf{C}^2)$. On définit un opérateur :

$$q_i : H^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \longrightarrow H^{*+2i-2}(\text{Hilb}^{n+i}(\mathbf{C}^2))$$

par⁽²⁾ :

$$q_i(\alpha) = \pi_{n+i}!(\pi_n^*(\alpha) \cup [X_{n,i}]).$$

En notant $|0\rangle \in H^0(\text{Hilb}^0(\mathbf{C}^2)) \cong \mathbf{Q}$ l'unité, on démontre alors que l'ensemble des vecteurs :

$$q_\lambda := q_{\lambda_1} \circ \cdots \circ q_{\lambda_k} |0\rangle \in H^{2n-2l(\lambda)}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)),$$

pour toutes les partitions $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ de n forme une base de $H^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ et l'isomorphisme :

$$\Psi : \Lambda^n \longrightarrow H^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$$

est caractérisé par : $\Psi(p_\lambda) = q_\lambda$.

Nous utiliserons plus tard l'observation classique suivante concernant les classes de cohomologie des sous-variétés X_λ :

Lemme 3.1.10. — *Pour toute partition $\lambda = (1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \dots)$ on a :*

$$[\overline{X_\lambda}] = \frac{1}{\prod_{i \geq 1} \alpha_i!} q_\lambda.$$

3.1.4. Anneau de cohomologie. — Lehn & Sorger [LS01] et Vasserot [Vas01] ont obtenu, par des méthodes différentes, une description explicite de la structure d'anneau induite par le produit *cup* sur Λ^n par Ψ . Reprenons cette description.

Soit $\mathbf{Q}[S_n]$ l'anneau du groupe symétrique S_n , *i.e.* l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{\pi \in S_n} a_\pi \pi$ où les a_π sont des nombres rationnels, muni du

⁽²⁾La formule donnée est valable au sens où l'on considère une intersection avec support. La projection de $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2) \times \text{Hilb}^{n+i}(\mathbf{C}^2)$ sur $\text{Hilb}^{n+i}(\mathbf{C}^2)$ n'est pas fermée mais sa restriction à la sous-variété $X_{n,i}$ est fermée. On peut le voir en considérant la situation identique pour le schéma projectif $\text{Hilb}^n(\mathbb{P}_{\mathbf{C}}^2)$: les projections sont alors fermées et la projection $X(\mathbb{P}_{\mathbf{C}}^2)_{n,i} \rightarrow \text{Hilb}^{n+i}(\mathbb{P}_{\mathbf{C}}^2)$ reste fermée. En se restreignant aux schémas de $n+i$ points ne rencontrant pas la droite à l'infini, on obtient que la projection $X_{n,i} \rightarrow \text{Hilb}^{n+i}(\mathbf{C}^2)$ est fermée.

produit :

$$\left(\sum_{\pi \in S_n} a_\pi \pi \right) \cdot \left(\sum_{\sigma \in S_n} b_\sigma \sigma \right) = \sum_{\pi, \sigma \in S_n} a_\pi b_\sigma \pi \sigma.$$

On identifie les éléments de l'anneau $\mathbf{Q}[S_n]$ avec les fonctions sur S_n à valeurs rationnelles : la donnée d'une fonction $f : S_n \rightarrow \mathbf{Q}$ est équivalente à la donnée de la combinaison linéaire $\sum_{\pi \in S_n} f(\pi) \pi$. Par cette identification, le produit sur l'anneau $\mathbf{Q}[S_n]$ correspond au produit de convolution sur les fonctions défini par :

$$(f * g)(\pi) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\pi \sigma^{-1}) g(\sigma).$$

Si $\pi \in S_n$ (resp. $\sigma \in S_n$) est identifié avec la fonction valant 1 en π (resp. σ) et 0 ailleurs, on a : $\pi \cdot \sigma = \pi * \sigma$.

Considérons le sous-ensemble $\mathcal{C}(S_n)$ des fonctions classes (voir §1.4.2). Si f et g sont deux fonctions classes, leur produit de convolution $f * g$ est encore une fonction classe donc $\mathcal{C}(S_n)$ hérite d'une structure de sous-anneau de $\mathbf{Q}[S_n]$. C'est le centre de cet anneau pour le produit de convolution.

On introduit une graduation $\text{gr}^F \mathbf{Q}[S_n] = \bigoplus_{d=0}^{n-1} \mathbf{Q}[S_n](d)$ de la manière suivante : une permutation π est dite de degré d si elle est produit d'un nombre minimal d de transpositions. De manière équivalente, si π a une décomposition en cycles disjoints de type λ , alors $\deg(\pi) = n - l(\lambda)$.

Le produit de convolution ne préserve pas la graduation mais est compatible avec la filtration croissante associée $F^d \mathbf{Q}[S_n] := \bigoplus_{d' \leq d} \mathbf{Q}[S_n](d')$, i.e. qu'il satisfait :

$$F^i \mathbf{Q}[S_n] * F^j \mathbf{Q}[S_n] \subset F^{i+j} \mathbf{Q}[S_n],$$

puisque : $\deg(\pi \sigma) \leq \deg(\pi) + \deg(\sigma)$ pour tous $\pi, \sigma \in S_n$.

Le produit induit sur le gradué $\text{gr}^F \mathbf{Q}[S_n] = \bigoplus_{d=0}^{n-1} F^d \mathbf{Q}[S_n] / F^{d-1} \mathbf{Q}[S_n]$ est appelé produit *cup*. Il est caractérisé par :

$$\pi \cup \sigma = \begin{cases} \pi * \sigma = \pi \cdot \sigma & \text{si } \deg(\pi \sigma) = \deg(\pi) + \deg(\sigma) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tous $\pi, \sigma \in S_n$.

Le sous-anneau $\mathcal{C}(S_n)$ est engendré par les éléments χ_λ qui sont homogènes de degré $n - l(\lambda)$ donc il hérite de la graduation, de la filtration et du produit *cup*. Nous noterons $\text{gr}^F \mathcal{C}(S_n)$ l'anneau gradué obtenu et $\text{gr}^F \Lambda^n$ l'anneau correspondant par l'isomorphisme de Frobenius, le produit restant noté \cup .

L'anneau Λ^n est donc gradué par $\deg p_\lambda = |\lambda| - l(\lambda)$ et nous y référerons en tant que *degré cohomologique* sur Λ^n . La filtration qui est en jeu sur Λ^n est ici la filtration croissante :

$$F^d \Lambda^n := \mathbf{Q}\{p_\lambda \mid \deg p_\lambda \leq d\}.$$

Le résultat est alors :

Théorème 3.1.11 (Lehn & Sorger, Vasserot). — [LS01, Vas01]

Le morphisme $\Psi : \mathrm{gr}^F \Lambda^n \rightarrow H^(\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ est un isomorphisme d'anneaux.*

3.2. Schéma de Hilbert isospectral

Le schéma de Hilbert isospectral X_n est le produit fibré réduit :

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{f} & \mathbf{C}^{2n} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2) & \xrightarrow{\rho} & S_n \mathbf{C}^2 \end{array}$$

Théorème 3.2.1 (Haiman). — [Hai01a, Théorème 3.1]

La projection $\pi : X_n \rightarrow \mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ est un morphisme plat fini de degré $n!$

Soit $P_n := \pi_* \mathcal{O}_{X_n}$ l'image directe du faisceau structural. C'est un faisceau localement libre de rang $n!$ et on note encore P_n le fibré vectoriel associé, dénommé *fibré isospectral* sur $\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$.

3.3. Schéma de Hilbert d'orbites

Nous avons vu précédemment, grâce à l'étude d'opérateurs géométriques, comment la cohomologie de la variété $\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ est isomorphe à l'espace des fonctions symétriques. Nous présentons maintenant une construction de nature très différente amenant à un isomorphisme entre la K-théorie de la variété $\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ et l'espace des fonctions symétriques, en faisant intervenir la correspondance de McKay. Bien sûr, via le caractère de Chern on obtient aussi un isomorphisme avec la cohomologie et l'un des objectifs de cette étude sera justement de comprendre en quelle mesure les deux constructions diffèrent.

Commençons en toute généralité. Partant d'un espace vectoriel V de dimension finie sur \mathbf{C} et d'un sous-groupe fini $G \subset GL(V)$, Ito & Nakamura [IN96] construisent le schéma de Hilbert de G -orbites régulières, noté $G\text{-Hilb}(V)$, de

la manière suivante : tout point v dans un ouvert de Zariski non vide de V a un stabilisateur trivial sous l'action de G . Son orbite $G.v$ définit donc un point dans $\text{Hilb}^{|G|}(V)$ et $G\text{-Hilb}(V)$ est défini comme la clôture dans $\text{Hilb}^{|G|}(V)$ du lieu de ces points. Pour tout $\xi \in G\text{-Hilb}(V)$, $H^0(\mathcal{O}_\xi)$ est la représentation régulière de G . La famille universelle sur $\text{Hilb}^{|G|}(V)$ se restreint en une famille universelle $p : Z \rightarrow G\text{-Hilb}(V)$. Le groupe G agit sur Z et sur le fibré tautologique $p_*\mathcal{O}_Z$. Ce fibré est de rang $|G|$ et l'action du groupe G sur ses fibres est la représentation régulière.

On s'intéresse au cas où $V = (\mathbf{C}^2)^n$ pour $G = S_n$ agissant par permutation des coordonnées. On note $S_n\text{-Hilb}(\mathbf{C}^{2n})$ le schéma de Hilbert de S_n -orbites et $Z_n \subset S_n\text{-Hilb}(\mathbf{C}^{2n}) \times \mathbf{C}^{2n}$ la famille universelle.

Théorème 3.3.1 (Haiman). — [Hai01a, Théorème 5.1] *Le schéma de Hilbert de S_n -orbites $S_n\text{-Hilb}(\mathbf{C}^{2n})$ est naturellement isomorphe au schéma de Hilbert de points $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$. L'isomorphisme identifie le schéma de Hilbert isospectral X_n avec la famille universelle Z_n .*

Par ce théorème, le fibré P_n n'est donc autre que le fibré tautologique $p_*\mathcal{O}_{Z_n}$ sur $S_n\text{-Hilb}(\mathbf{C}^{2n})$.

Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} Z_n & \xrightarrow{q} & \mathbf{C}^{2n} \\ p \downarrow & & \downarrow \\ S_n\text{-Hilb}(\mathbf{C}^{2n}) & \xrightarrow{\rho} & S^n\mathbf{C}^2 \end{array}$$

Soit $D(S_n\text{-Hilb}(\mathbf{C}^{2n}))$ la catégorie dérivée bornée de faisceaux cohérents sur $S_n\text{-Hilb}(\mathbf{C}^{2n})$ et $D_{S_n}(\mathbf{C}^{2n})$ la catégorie dérivée bornée de faisceaux cohérents S_n -équivalents sur \mathbf{C}^{2n} . Puisque $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ est isomorphe à $S_n\text{-Hilb}(\mathbf{C}^{2n})$ et que le morphisme de Hilbert-Chow ρ est semi-petit, les hypothèses du théorème de Bridgeland, King & Reid [BKR01] sont satisfaites (voir §6.1.2) donc le foncteur :

$$\Upsilon := \mathbf{R}q_* \circ p^* : D(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \longrightarrow D_{S_n}(\mathbf{C}^{2n})$$

est une équivalence de catégories.

Cette équivalence de catégories induit un isomorphisme de groupes de Grothendieck :

$$\Upsilon : K(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \longrightarrow K_{S_n}(\mathbf{C}^{2n}),$$

où $K_{S_n}(\mathbf{C}^{2n})$ désigne le groupe de Grothendieck de fibrés vectoriels algébriques S_n -équivalents sur \mathbf{C}^{2n} . En l'identifiant avec le groupe de Grothendieck de

$A_n := \mathcal{O}(\mathbf{C}^{2n})$ -modules S_n -équivalents de type fini, on observe (voir Haiman [Hai02]) que l'isomorphisme Υ s'exprime par :

$$\Upsilon(F) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i H^i(\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2), P_n \otimes F)$$

pour tout fibré vectoriel F sur $\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$. Les groupes $H^i(\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2), P_n \otimes F)$ sont vus comme des A_n -modules S_n -équivalents à travers les fibres de P_n .

Soit Θ la composée d'isomorphismes d'espaces vectoriels :

$$\Theta : \Lambda^n \xrightarrow{\Phi^{-1}} \mathcal{C}(S_n) \xrightarrow{\chi^{-1}} R(S_n) \xrightarrow{Thom} K_{S_n}(\mathbf{C}^{2n}) \xrightarrow{\Upsilon^{-1}} K(\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$$

où $Thom$ désigne l'isomorphisme de Thom consistant ici à la restriction à une fibre (voir [CG97, Théorème 5.4.17]).

En considérant le fibré P_n comme l'image directe de la famille universelle Z_n , i.e. $P_n = p_* \mathcal{O}_{Z_n}$, l'action naturelle du groupe S_n sur le fibré P_n induit une décomposition isotypique :

$$P_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathbf{V}^\lambda \otimes P_\lambda,$$

où \mathbf{V}^λ désigne le fibré trivial de fibre V^λ sur $\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$, en notant $P_\lambda := \mathrm{Hom}_{S_n}(\mathbf{V}^\lambda, P_n)$. On note P_λ^* le fibré dual du fibré P_λ .

En faisant un calcul identique à celui d'Ito-Nakajima ([IN00, Formule (5.3)]), à cette différence près que notre transformation de Fourier-Mukai est écrite dans le sens inverse, on obtient :

Proposition 3.3.2. — *Pour toute partition λ , on a $\Theta(s_\lambda) = P_\lambda^*$. En particulier, les fibrés P_λ forment une base du groupe de Grothendieck $K(\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$.*

CHAPITRE 4

CLASSES DE CHERN DES FIBRÉS LINÉARISÉS

Nous démontrons dans ce chapitre des formules combinatoires pour les classes caractéristiques des fibrés vectoriels sur le schéma de Hilbert de points sur le plan affine. Nos formules s'appliquent à tout fibré vectoriel relevant l'action naturelle du tore algébrique de dimension 1 sur le schéma $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ et s'expriment en fonction de données aux points fixes de l'action. La méthode consiste à calculer les classes caractéristiques équivariantes dans l'anneau de cohomologie équivariante du schéma $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ pour récupérer ensuite les classes caractéristiques. Cette approche s'appuie sur l'étude de Vasserot [Vas01] que nous rappelons dans un premier temps.

4.1. Action du tore sur le schéma de Hilbert de points

Remarque 4.1.1. — Dans cette section, je reprends en détail certains aspects de l'article de Vasserot [Vas01]. Je remercie Éric Vasserot de son aide dans la compréhension de ce travail.

Nous considérons la situation suivante : le tore $T = \mathbf{C}^*$ agit sur $\mathbf{C}^2 = \text{Spec } \mathbf{C}[x, y]$ par :

$$s.x = sx, s.y = s^{-1}y, \quad \forall s \in T.$$

Ceci induit une action naturelle sur $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$. Si $I \in \text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ est un idéal, son image sous l'action de $s \in T$ est donnée par image réciproque :

$$s.I = \{p(s^{-1}x, sy) \mid p \in I\}.$$

L'action de T sur $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ a un nombre fini de points fixes paramétrés par les partitions de l'entier n : ce sont les schémas supportés en l'origine de \mathbf{C}^2 et dont l'idéal est monomial. Nous notons ces points $\xi_\lambda \in \text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$.

On s'intéresse à la cohomologie T -équivariante⁽¹⁾ de $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$. En notant $E_T \rightarrow B_T$ l'espace classifiant des fibrés vectoriels T -équivariants, nous posons $(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))_T := (\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2) \times E_T)/T$ le quotient pour l'action diagonale de T . L'anneau de cohomologie équivariante $H_T^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) := H^*((\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))_T)$ est une $\mathbf{Q}[u]$ -algèbre graduée pour l'isomorphisme naturel $H^*(B_T) \cong \mathbf{Q}[u]$ où u est une indéterminée de degré 2.

Nous notons $j : \text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2) \hookrightarrow (\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))_T$ l'inclusion d'une fibre dans la projection $p : (\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))_T \rightarrow B_T$ (par choix d'un point de base) et pour tout $\mathbf{Q}[u]$ -module M nous notons M' la localisation de M en l'idéal $\langle u - 1 \rangle$.

Soit $\Sigma \subset \mathbf{C}^2$ la droite d'équation $x = 0$ et $X_{n,i}^\Sigma$ la sous-variété de $X_{n,i}$ (définie lors de la construction des opérateurs de Nakajima) pour laquelle le point extrémal est sur Σ . Plus précisément, en notant $\rho_i : X_{n,i} \rightarrow S^i \mathbf{C}^2$ la « variante » du morphisme de Hilbert-Chow associant à un couple $(\xi \subset \xi')$ le cycle représentant la différence entre les deux sous-schémas et $\varphi : \mathbf{C}^2 \rightarrow S^i \mathbf{C}^2$ l'inclusion $x \mapsto i \cdot x$, on a $[X_{n,i}^\Sigma]_T = \rho_i^* \varphi! [\Sigma]_T$. Définissons pour tout $i \geq 1$ un opérateur :

$$q_i^T[\Sigma] : H_T^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \longrightarrow H_T^{*+2i}(\text{Hilb}^{n+i}(\mathbf{C}^2))$$

par :

$$q_i^T[\Sigma](\alpha) = \pi_{n+i!}(\pi_n^* \alpha \cup [X_{n,i}^\Sigma]_T).$$

Vasserot [Vas01] démontre alors que l'ensemble des vecteurs :

$$q_\lambda^T[\Sigma] := q_{\lambda_1}^T[\Sigma] \circ \cdots \circ q_{\lambda_k}^T[\Sigma] 1_{\text{Hilb}^0(\mathbf{C}^2)} \in H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$$

pour toutes les partitions $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ de n forme une base de $H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ et construit un isomorphisme :

$$\phi : H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \rightarrow \Lambda^n$$

par⁽²⁾ $\phi(q_\lambda^T[\Sigma]) = p_\lambda$.

Pour tout $i \geq 1$, définissons un opérateur :

$$q_i^T : H_T^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \longrightarrow H_T^{*+2i-2}(\text{Hilb}^{n+i}(\mathbf{C}^2))$$

par :

$$q_i^T(\alpha) = \pi_{n+i!}(\pi_n^* \alpha \cup [X_{n,i}]_T)$$

et posons comme précédemment :

$$q_\lambda^T := q_{\lambda_1}^T \circ \cdots \circ q_{\lambda_k}^T 1_{\text{Hilb}^0(\mathbf{C}^2)} \in H_T^{2n-2l(\lambda)}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)).$$

⁽¹⁾L'appendice B contient des détails sur les notations utilisées en cohomologie équivariante.

⁽²⁾Il y a une imprécision dans [Vas01] : il manque un facteur $z_{(i)}$ dans la formule (2) (voir Nakajima [Nak96b, Lemme 9.4]).

En observant que $[\Sigma]_T = u \cdot [\mathbf{C}^2]_T$ on déduit par $\mathbf{Q}[u]$ -linéarité des opérateurs :

$$q_\lambda^T[\Sigma] = u^{l(\lambda)} q_\lambda^T \in H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)).$$

La naturalité des opérations cohomologiques utilisées fournit le lien entre la cohomologie et la cohomologie équivariante puisque l'inclusion :

$$j : \text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2) \hookrightarrow (\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))_T$$

induit un morphisme d'anneaux $j^* : H_T^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \rightarrow H^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ tel que :

$$j^* q_\lambda^T = q_\lambda.$$

Nous sommes donc dans la configuration d'un fibré :

$$\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2) \xrightarrow{j} (\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))_T \xrightarrow{p} B_T$$

pour lequel nous disposons de classes de cohomologie $q_\lambda^T \in H^*((\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))_T)$ telles que les restrictions $j^* q_\lambda^T = q_\lambda$ forment une base de l'espace de cohomologie $H^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$. Le théorème de Leray-Hirsch s'applique donc et donne un isomorphisme de $H^*(B_T)$ -modules gradués :

$$H_T^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) = H^*((\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))_T) \cong H^*(B_T) \otimes_{\mathbf{Q}} H^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)).$$

Puisque B_T et $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ n'ont pas de cohomologie impaire, il en est donc de même de $(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))_T$ et le théorème fournit une base en chaque degré cohomologique :

$$\begin{aligned} H_T^{2m}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) &\cong \bigoplus_{k=0}^m H^{2m-2k}(B_T) \otimes H^{2k}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \\ u^{m-k} q_\lambda^T &\leftrightarrow u^{m-k} \otimes q_\lambda \end{aligned}$$

où λ désigne une partition de n telle que $n - l(\lambda) = k$.

En considérant la décomposition de $\mathbf{Q}[u]$ -modules :

$$H_T^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \cong \mathbf{Q}[u] \otimes_{\mathbf{Q}} H^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)),$$

nous voyons que la multiplication par u envoyant $H_T^k(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ sur $H_T^{k+2}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ est injective. Par ailleurs, puisque $H^q(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) = 0$ pour $q \geq 2n$, l'espace vectoriel $H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ contient toute l'information sur la cohomologie équivariante et la multiplication par u devient un isomorphisme à partir de ce niveau :

$$H_T^0(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \xrightarrow{u} \dots \xrightarrow{u} H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \xrightarrow[\sim]{u} H_T^{2n+2}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \xrightarrow[\sim]{u} \dots$$

La décomposition obtenue par le théorème de Leray-Hirsch munit en particulier $H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ d'une structure d'espace vectoriel gradué : nous notons $\text{gr } H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ l'espace vectoriel gradué correspondant et

$H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))(k)$ le sous-espace vectoriel des éléments de degré k . Puisque $q_\lambda^T[\Sigma] = u^{l(\lambda)} q_\lambda^T$, les vecteurs $q_\lambda^T[\Sigma]$ forment une base homogène de l'espace vectoriel gradué $\text{gr } H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ avec $\deg q_\lambda^T[\Sigma] = n - l(\lambda)$. Par le choix de cette base homogène, on dispose d'un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \xrightarrow{\text{can.}} \text{gr } H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$$

associant à chaque vecteur ses composantes homogènes. Nous adoptons la notation suivante : pour $\alpha \in H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$, $\text{gr}_k \alpha$ désigne la composante de degré k de α pour la décomposition dans la base homogène $q_\lambda^T[\Sigma]$.

On dispose d'un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués :

$$J : \text{gr } H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \rightarrow H^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$$

défini par $J(q_\lambda^T[\Sigma]) = q_\lambda$. Autrement dit, en regardant à travers la décomposition $H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \cong \bigoplus_{k=0}^n u^k \otimes H^{2n-2k}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$, l'isomorphisme J signifie concrètement « on pose $u = 1$ ».

Puisque le morphisme $\phi : H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \rightarrow \Lambda^n$ fait correspondre les bases graduées, il définit correctement un isomorphisme au niveau des espaces vectoriels gradués, que nous notons $\text{gr } \phi : \text{gr } H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \rightarrow \text{gr } \Lambda^n$ (voir §3.1.4). Le diagramme suivant est donc commutatif :

$$(4.1 \text{ a}) \quad \begin{array}{ccccc} \Lambda^n & \xrightarrow{\text{can.}} & \text{gr } \Lambda^n & & \\ \phi \uparrow & & \text{gr } \phi \uparrow & \searrow \Psi & \\ H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) & \xrightarrow{\text{can.}} & \text{gr } H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) & \xrightarrow{J} & H^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \end{array}$$

L'étape suivante chez Vasserot [Vas01] consiste à décrire les structures d'anneaux sur les divers espaces. Des informations précédentes on extrait un isomorphisme $H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \xrightarrow{\sim} H_T^{4n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ donné par multiplication par u^n . On peut donc définir un produit :

$$\star : H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \times H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \rightarrow H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$$

par l'identité :

$$u^n \cdot (x \star y) = x \cup y.$$

Cette structure d'algèbre sur $H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ n'est pas compatible avec la graduation mais elle est compatible avec la filtration croissante associée :

$$F^k H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) := \bigoplus_{k' \leq k} H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))(k'),$$

i.e. qu'elle satisfait :

$$F^i H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \star F^j H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \subset F^{i+j} H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)).$$

Ce produit induit donc une structure d'algèbre graduée sur $\text{gr } H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ de produit noté \star_{gr} . Pour cette structure, l'isomorphisme J devient un isomorphisme d'algèbres graduées :

$$J : (\text{gr } H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)), \star_{\text{gr}}) \cong (H^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)), \cup).$$

Posons $[\lambda] \in H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ l'élément défini par l'identité :

$$u^n \cdot [\lambda] = (-1)^n h(\lambda)^{-1} [\xi_\lambda]_T,$$

où $h(\lambda)$ désigne le produit des longueurs d'équerres sur le diagramme de Young de λ :

$$h(\lambda) := \prod_{x \in D(\lambda)} h(x).$$

Soit $S^n \Sigma \subset S^n \mathbf{C}^2$ la sous-variété des 0-cycles portés sur la courbe Σ et $S_\lambda \Sigma$ la stratification de $S^n \Sigma$ construite comme au §3.1.2. On considère les sous-variétés :

$$Y_\lambda := \rho^{-1} S_\lambda \Sigma.$$

Remarque 4.1.2. — Vasserot [Vas01] utilise une description différente de ces sous-variétés. L'équivalence des deux définitions est expliquée dans Nakajima [Nak96a]. En particulier, les adhérences \overline{Y}_λ sont des sous-variétés fermées de $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ de dimension n et T -stables.

Proposition 4.1.3 (Vasserot). — [Vas01]

- (i) Pour toute partition λ , on a $\phi([\lambda]) = s_\lambda$.
- (ii) Pour toute partition λ , on a $\phi\left(\left[\overline{Y}_\lambda\right]_T\right) = m_\lambda$.

Remarque 4.1.4. — De ces informations, Vasserot [Vas01] déduit la structure d'anneau : $\text{gr } \phi$ est un isomorphisme d'algèbres pour la structure *cup* sur $\text{gr } \Lambda^n$ présentée au §3.1.4.

On observe le fait suivant :

Lemme 4.1.5. — On a $J\left(\text{gr}_{n-l(\lambda)}\left[\overline{Y}_\lambda\right]_T\right) = \left[\overline{X}_\lambda\right]$.

Démonstration. — D'après le lemme 1.3.3, si $\lambda = (1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \dots)$ on a :

$$m_\lambda = \frac{1}{\prod_{i \geq 1} \alpha_i!} p_\lambda + \text{termes de degré cohomologique supérieur.}$$

Puisque ϕ est compatible avec les graduations, cela signifie d'après la proposition 4.1.3 que :

$$\mathrm{gr}_{n-l(\lambda)} \left[\overline{Y_\lambda} \right]_T = \frac{1}{\prod_{i \geq 1} \alpha_i!} q_\lambda^T[\Sigma].$$

D'après le lemme 3.1.10, on a :

$$\Psi \left(\frac{1}{\prod_{i \geq 1} \alpha_i!} p_\lambda \right) = \left[\overline{X_\lambda} \right] \in H^{2n-2l(\lambda)}(\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)),$$

dont on déduit avec la commutativité du diagramme :

$$J \left(\mathrm{gr}_{n-l(\lambda)} \left[\overline{Y_\lambda} \right]_T \right) = \left[\overline{X_\lambda} \right].$$

□

4.2. Classes de Chern des fibrés linéarisés

Si F est un fibré T -linéarisé de rang r sur $\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$, chaque fibre $F(\xi_\lambda)$ est une représentation de T . Par identification de l'anneau de représentations de T (à coefficients entiers) avec l'anneau de polynômes en une indéterminée $R(T) \cong \mathbf{Z}[s, s^{-1}]$, nous notons cette représentation par :

$$F(\xi_\lambda) := F_\lambda(s) := \sum_{i=1}^r s^{f_i^\lambda},$$

où les entiers relatifs f_i^λ sont appelés les *poids* de l'action de T sur F en ξ_λ .

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat suivant permettant de calculer les classes de Chern du fibré F à partir de la connaissance de ses poids en chaque point fixe pour l'action de T :

Théorème 4.2.1. — *Soit F un fibré T -linéarisé de rang r sur $\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ et $f_1^\lambda, \dots, f_r^\lambda$ les poids associés à l'action sur les fibres en chaque point fixe. Alors pour tout $k \geq 0$, la k -ième classe de Chern du fibré F vue dans Λ^n sous Ψ vaut :*

$$c_k(F) = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)} \sigma_k(f_1^\lambda, \dots, f_r^\lambda) \sum_{\substack{\mu \vdash n \\ l(\mu) = n-k}} z_\mu^{-1} \chi_\mu^\lambda p_\mu,$$

où les $\sigma_k(\cdot)$ désignent les fonctions symétriques élémentaires.

Le k -ième caractère de Chern du fibré F vaut :

$$ch_k(F) = \frac{1}{k!} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)} \sum_{i=1}^r (f_i^\lambda)^k \sum_{\substack{\mu \vdash n \\ l(\mu)=n-k}} z_\mu^{-1} \chi_\mu^\lambda p_\mu.$$

Remarque 4.2.2. — La formule donnant les classes de Chern apparaît comme une version raffinée de la formule de Bott, calculant non pas les nombres de Chern mais toutes les classes de Chern, utilisée ici dans un contexte non compact.

Démonstration. — Le principe de cette démonstration consiste à calculer les classes de Chern équivariantes de F puis à y lire convenablement l'information qui concerne les classes de Chern usuelles.

Si λ est une partition de n et ξ_λ le point fixe de $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ correspondant à λ , on note l'inclusion du point par $i_\lambda : \xi_\lambda \hookrightarrow \text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ et la classe fondamentale de cohomologie équivariante par $[\xi_\lambda]_T := i_{\lambda!} 1_{\xi_\lambda} \in H_T^{4n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$. L'inclusion du lieu des points fixes est notée :

$$i_n := \bigoplus_{\lambda \vdash n} i_\lambda : (\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))^T \rightarrow \text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2).$$

D'après le théorème de localisation en cohomologie équivariante, l'image directe localisée :

$$i_{n!} : H_T^*((\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))^T)' \rightarrow H_T^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))'$$

est un isomorphisme d'inverse donné par :

$$\alpha \mapsto \sum_{\lambda \vdash n} \frac{i_\lambda^* \alpha}{c_{max}^T(T_{\xi_\lambda} \text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))} 1_{\xi_\lambda}.$$

Notons θ la représentation de poids 1 de T (i.e. celle pour laquelle $s \in T$ agit par multiplication par s). L'isomorphisme $H_T^*(pt) = H^*(B_T) \cong \mathbf{Q}[u]$ étant donné par la première classe de Chern, pour tout entier relatif a on a :

$$c_{tot}^T(\theta^{\otimes a}) = 1 + auZ \in H^*(B_T)[Z],$$

où l'on note ainsi la classe de Chern totale :

$$c_{tot}^T := 1 + c_1^T Z + c_2^T Z^2 + \dots$$

Ainsi, si F est un fibré T -linéarisé de rang r sur $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ et $f_1^\lambda, \dots, f_r^\lambda$ les poids de l'action au point fixe ξ_λ , de la propriété $c_{tot}(E \oplus G) = c_{tot}(E)c_{tot}(G)$ on déduit :

$$c_{tot}^T(i_\lambda^* F) = \prod_{i=1}^r (1 + f_i^\lambda uZ).$$

En particulier, on sait (voir par exemple Nakajima [Nak96b]) que l'espace tangent à $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ en un point fixe ξ_λ est une représentation de T donnée par la formule suivante :

$$i_\lambda^* T \text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2) = T_{\xi_\lambda} \text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2) \cong \bigoplus_{x \in D(\lambda)} (\theta^{h(x)} \oplus \theta^{-h(x)}).$$

On en déduit que :

$$c_{tot}^T(T_{\xi_\lambda} \text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) = \prod_{x \in D(\lambda)} (1 - h(x)^2 u^2 Z^2),$$

et en particulier :

$$c_{max}^T(T_{\xi_\lambda} \text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) = (-1)^n h(\lambda)^2 u^{2n}.$$

De la formule de localisation inverse on déduit alors dans $H_T^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))'[Z]$:

$$c_{tot}^T(F) = (-1)^n \frac{1}{u^{2n}} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)^2} \prod_{i=1}^r (1 + f_i^\lambda u Z) [\xi_\lambda]_T.$$

Puisque $H^q(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) = 0$ pour $q > 2n$, seules les classes de Chern $c_k(F)$ pour $k \leq n$ nous intéressent, donc nous ne calculons les classes $c_k^T(F)$ que pour $k \leq n$. En prenant dans la formule précédente le terme en Z^k on obtient l'équation suivante dans $H_T^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))'$:

$$u^{2n} c_k^T(F) = (-1)^n u^k \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)^2} \sigma_k(f_1^\lambda, \dots, f_r^\lambda) [\xi_\lambda]_T,$$

où les $\sigma_k(\cdot)$ désignent les fonctions symétriques élémentaires. Puisque u est inversible, on obtient l'équation suivante dans le module localisé $H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))'$:

$$u^{n-k} c_k^T(F) = (-1)^n u^{-n} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)^2} \sigma_k(f_1^\lambda, \dots, f_r^\lambda) [\xi_\lambda]_T,$$

ou encore :

$$u^{n-k} c_k^T(F) = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)} \sigma_k(f_1^\lambda, \dots, f_r^\lambda) [\lambda].$$

Par définition de la localisation, cela signifie qu'il existe un polynôme $Q(u)$ dans $\mathbf{Q}[u]$ tel que $Q(1) \neq 0$ pour lequel l'équation suivante a lieu dans $H_T^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))'$:

$$Q(u) \cdot \left(u^{n-k} c_k^T(F) - \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)} \sigma_k(f_1^\lambda, \dots, f_r^\lambda) [\lambda] \right) = 0.$$

Cependant, le terme entre parenthèses est dans $H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ et on a observé précédemment que la multiplication par u est un isomorphisme à partir de ce degré cohomologique, donc on peut simplifier Q dans cette équation pour obtenir l'équation cette fois dans $H_T^{2n}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$:

$$u^{n-k}c_k^T(F) = \sum_{\lambda} \frac{1}{h(\lambda)} \sigma_k(f_1^\lambda, \dots, f_r^\lambda)[\lambda].$$

De cette formule nous pouvons récupérer la k -ième classe de Chern $c_k(F)$ de F en observant le fait suivant :

Lemme 4.2.3. — On a $J(\text{gr}_k(u^{n-k}c_k^T(F))) = c_k(F)$.

Démonstration du lemme. — Dans la décomposition :

$$H_T^{2k}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \cong \bigoplus_{j=0}^k H_T^{2j}(B_T) \otimes_{\mathbf{Q}} H_T^{2k-2j}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)),$$

on peut écrire :

$$c_k^T(F) = \sum_{j=0}^k u^j \otimes \alpha_j.$$

Puisque l'isomorphisme du théorème de Leray-Hirsch est un morphisme de $\mathbf{Q}[u]$ -modules on a donc, toujours au travers de l'isomorphisme donné par le théorème de Leray-Hirsch :

$$u^{n-k}c_k^T(F) = \sum_{j=0}^k u^{n-k+j} \otimes \alpha_j,$$

donc $\text{gr}_k(u^{n-k}c_k^T(F)) = u^{n-k} \otimes \alpha_0$ et ainsi :

$$J(\text{gr}_k(u^{n-k}c_k^T(F))) = \alpha_0.$$

Par ailleurs, par construction de l'isomorphisme de Leray-Hirsch, on peut écrire dans $H_T^{2k}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$:

$$c_k^T(F) = \sum_{j=0}^k u^j \alpha'_j$$

pour des classes $\alpha'_j \in H_T^{2k-2j}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ telles que $j^*\alpha'_j = \alpha_j$. Puisque la composition $p \circ j : \text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2) \rightarrow B_T$ envoie $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ sur le point base, on a $j^*u = 0$, au sens où u désigne en fait p^*u pour cette structure de module. Puisque j^* est un morphisme d'anneaux et que $j^*c_k^T(F) = c_k(F)$, cela implique que $c_k(F) = \alpha_0$, d'où le résultat annoncé. \square

La commutativité du diagramme (4.1 a), la proposition 4.1.3 et le lemme ci-dessus donnent alors l'expression des classes de Chern de F vues sous Ψ dans Λ^n :

$$c_k(F) = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)} \sigma_k(f_1^\lambda, \dots, f_r^\lambda) [s_\lambda]_k,$$

où $[s_\lambda]_k$ signifie que l'on ne conserve que la composante de degré cohomologique k . La formule des caractères de Frobenius inverse (proposition 1.4.2) donne alors l'expression dans la base des fonctions de Newton :

$$c_k(F) = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)} \sigma_k(f_1^\lambda, \dots, f_r^\lambda) \sum_{\substack{\mu \vdash n \\ l(\mu)=n-k}} z_\mu^{-1} \chi_\mu^\lambda p_\mu.$$

Similairement, on calcule les caractères de Chern à partir des caractères de Chern équivariants. Sachant que pour un fibré L de rang 1 le caractère de Chern est donné par $ch(L) = e^{c_1(L)}$ et en utilisant la propriété $ch(E \oplus G) = ch(E) + ch(G)$ on déduit (voir aussi Li, Qin & Wang [LQW03a]) :

$$ch_k^T(i_\lambda^* F) = \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^r (f_i^\lambda)^k.$$

La formule de localisation inverse permet d'obtenir :

$$u^{n-k} ch_k^T(F) = \frac{1}{k!} \sum_{\lambda} \frac{1}{h(\lambda)} \sum_{i=1}^r (f_i^\lambda)^k [\lambda],$$

puis par naturalité $j^* ch_k^T(F) = ch_k(F)$ et par le même argument que précédemment :

$$ch_k(F) = \frac{1}{k!} \sum_{\lambda} \frac{1}{h(\lambda)} \sum_{i=1}^r (f_i^\lambda)^k [s_\lambda]_k,$$

ou de manière équivalente :

$$ch_k(F) = \frac{1}{k!} \sum_{\lambda} \frac{1}{h(\lambda)} \sum_{i=1}^r (f_i^\lambda)^k \sum_{\substack{\mu \vdash n \\ l(\mu)=n-k}} z_\mu^{-1} \chi_\mu^\lambda p_\mu.$$

□

4.3. Commentaire

La méthode utilisée permet aussi de calculer les classes de Todd de ces fibrés. Partant des formules $td(L) = \frac{c_1(L)}{1 - e^{-c_1(L)}}$ pour un fibré L de rang 1 et

$td(E \oplus G) = td(E)td(G)$ on déduit :

$$td^T(i_\lambda^* F) = \prod_{i=1}^r \left(\frac{f_i^\lambda u}{1 - e^{-f_i^\lambda u}} \right),$$

puis :

$$td^T(F) = \frac{1}{u^n} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)} \prod_{i=1}^r \left(\frac{f_i^\lambda u}{1 - e^{-f_i^\lambda u}} \right) [\lambda].$$

Pour extraire de cette formule les diverses classes de Todd, il faut faire les développements limités des quotients. Ce type de calcul s'inscrit dans le cadre des *suites multiplicatives* de Hirzebruch [Hir66], dont nous rappelons le principe d'utilisation.

Soit $Q(z) := \sum_{i=0}^{+\infty} b_i z^i$ une série formelle et $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ des indéterminées. On cherche une formule pour le développement :

$$\prod_{j=1}^r Q(\gamma_j z) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_k z^k.$$

Soit $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ les fonctions symétriques élémentaires en les indéterminées $\gamma_1, \dots, \gamma_r$, définies par l'identité :

$$\prod_{j=1}^r (1 + \gamma_j z) = 1 + \sum_{i=1}^r \sigma_i z^i.$$

Alors il existe des polynômes $K_k(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ tels que :

$$\prod_{j=1}^r Q(\gamma_j z) = \sum_{k=0}^{+\infty} K_k(\sigma_1, \dots, \sigma_r) z^k.$$

Ces polynômes sont uniquement déterminés (ici jusqu'au rang r). Par exemple, pour $Q(z) = \frac{z}{1-e^{-z}}$ on obtient les *polynômes de Todd* :

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} \sigma_1, \\ T_2 &= \frac{1}{12} (\sigma_2 + \sigma_1^2), \\ T_3 &= \frac{1}{24} \sigma_1 \sigma_2, \dots \end{aligned}$$

Ainsi, pour le calcul qui nous occupe :

$$\prod_{i=1}^r \left(\frac{f_i^\lambda u}{1 - e^{-f_i^\lambda u}} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} T_k(\sigma_1, \dots, \sigma_r) u^k,$$

avec $\sigma_k := \sigma_k(f_1^\lambda, \dots, f_r^\lambda)$. Par le même procédé qu'auparavant, on en déduit la formule combinatoire des classes de Todd de F :

$$td_k(F) = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)} T_k(\sigma_1, \dots, \sigma_r) [s_\lambda]_k.$$

En fait, le calcul des classes de Chern a reposé sur le même principe, d'une manière élémentaire puisque dans ce cas on prenait $Q(z) = 1 + z$ et les polynômes intervenant étaient simplement $K_k(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \sigma_k$.

Par contre, le calcul des caractères de Chern est un peu différent car le caractère de Chern est additif. La série formelle à considérer est $Q(z) = e^z$ mais on utilise cette fois le développement :

$$\sum_{j=1}^r Q(\gamma_j z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} S_k(\gamma_1, \dots, \gamma_r) z^k$$

où $S_k(\gamma_1, \dots, \gamma_r) = \sum_{j=1}^r \gamma_j^k$ est la k -ième somme de Newton.

4.4. Formules globales

Pour un fibré T -linéarisé F sur $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$, $F_\lambda(s) \in \mathbf{Z}[s, s^{-1}]$ désigne toujours la représentation au point fixe ξ_λ . Introduisons une indéterminée t et posons :

$$\omega_t p_k := t^{k-1} p_k,$$

que l'on prolonge en un morphisme d'algèbres $\omega_t : \Lambda \rightarrow \Lambda[t]$. On a ainsi $\omega_t p_\lambda = t^{|\lambda| - l(\lambda)} p_\lambda$: cette notation permet de garder une trace du degré cohomologique. On obtient alors :

$$\sum_{k \geq 0} [s_\lambda]_k t^k = \omega_t s_\lambda.$$

Les formules précédentes de caractères de Chern se simplifient en une formule globale qui nous sera utile au §6.2.2 :

Proposition 4.4.1. — *Le caractère de Chern total d'un fibré linéarisé F sur $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ est donné par :*

$$ch(F) = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)} \text{Coeff} \left(t^0, \omega_t s_\lambda F_\lambda(e^{1/t}) \right).$$

Le caractère de Chern total de son fibré dual F^ est donné par :*

$$ch(F^*) = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)} \text{Coeff} \left(t^0, \omega_t s_\lambda F_\lambda(e^{-1/t}) \right).$$

Démonstration. — D'après le théorème 4.2.1 et sa démonstration, le caractère de Chern total de F vaut :

$$ch(F) = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)} \sum_{i=1}^r \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (f_i^\lambda)^k [s_\lambda]_k.$$

En remarquant que :

$$F_\lambda(e^{1/t}) = \sum_{i=1}^r e^{f_i^\lambda/t} = \sum_{i=1}^r \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (f_i^\lambda)^k t^{-k},$$

et que

$$\omega_t s_\lambda = \sum_{k \geq 0} [s_\lambda]_k t^k,$$

on déduit la première formule annoncée. La deuxième formule se démontre de même, en utilisant que $ch_k(F^*) = (-1)^k ch_k(F)$. \square

On observe une formule similaire pour la classe de Chern totale d'un fibré linéarisé :

Proposition 4.4.2. — *La classe de Chern totale d'un fibré linéarisé F de rang r sur $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ est donnée par :*

$$c_{tot}(F) = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)} \text{Coeff} \left(t^0, \omega_t s_\lambda \prod_{i=1}^r (1 + f_i^\lambda t^{-1}) \right).$$

CHAPITRE 5

ACTION DES FIBRÉS LINÉARISÉS

Nous considérons le problème suivant : un fibré vectoriel F sur $\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ induit un opérateur sur $K(\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ par multiplication : $G \mapsto F \otimes G$. Via l'isomorphisme $\Theta : \Lambda^n \rightarrow K(\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$, on cherche à déterminer l'opérateur que l'on obtient sur Λ^n :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^n & \xrightarrow[\sim]{\Theta} & K(\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \\ \mathcal{E}_F \downarrow & & \downarrow F \otimes - \\ \Lambda^n & \xrightarrow[\sim]{\Theta} & K(\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \end{array}$$

Puisque l'espace vectoriel $K(\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ a une base de fibrés T^2 -linéarisés (proposition 3.3.2), il suffit de travailler avec des fibrés linéarisés. Nous reprenons pour cela certains résultats de Haiman [**Hai98**, **Hai99**, **Hai01a**, **Hai01b**, **Hai02**, **Hai03**].

Le tore $T^2 = (\mathbf{C}^*)^2$ agit sur $\mathbf{C}^2 = \mathrm{Spec} \mathbf{C}[x, y]$ par :

$$\begin{aligned} (t, q).x &= tx, \\ (t, q).y &= qy, \end{aligned}$$

et s'étend en une action sur tous les objets en jeu au-dessus de \mathbf{C}^2 . En particulier, l'isomorphisme Υ est compatible avec cette action et induit un isomorphisme $\Upsilon : K_{T^2}(\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \rightarrow K_{S_n \times T^2}(A_n)$ (rappelons que $A_n = \mathcal{O}((\mathbf{C}^2)^n)$ et que $K_{S_n \times T^2}(A_n)$ désigne le groupe de Grothendieck des A_n -modules de type fini $S_n \times T^2$ -équivariants).

5.1. Formules de caractères

On dispose d'une généralisation de l'isomorphisme de Frobenius pour les A_n -modules de type fini $S_n \times T^2$ -équivariants :

Définition 5.1.1. — Soit M un A_n -module de type fini $S_n \times T^2$ -équivariant, et notons $M = \bigoplus_{i,j} M_{i,j}$ sa décomposition isotypique sous T^2 , où chaque $M_{i,j}$ est la représentation de S_n sur laquelle le groupe T^2 agit par multiplication par $t^i q^j$. On appelle *série de Frobenius* de M la série formelle :

$$\mathcal{F}_M = \sum_{i,j} t^i q^j \Phi(M_{i,j}) \in \Lambda_{\mathbf{Q}[[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]]}.$$

Notons par \otimes le produit dans Λ issu depuis $\Phi \circ \chi$ du produit tensoriel de représentations. On observe les formules élémentaires suivantes :

Proposition 5.1.2. —

(i) Si $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow 0$ est une suite exacte de A_n -modules de type fini $S_n \times T^2$ -équivariants, on a :

$$\mathcal{F}_M = \mathcal{F}_N + \mathcal{F}_P.$$

(ii) Pour tous A_n -modules de type fini $S_n \times T^2$ -équivariants M, N on a :

$$\mathcal{F}_{M \otimes_{\mathbf{C}} N} = \mathcal{F}_M \otimes \mathcal{F}_N.$$

Pour toute partition μ de n , soit $\xi_\mu \in \text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ l'idéal monomial construit sur le diagramme de Young de μ (avec les conventions du chapitre 4). Les points ξ_μ sont les points fixes pour l'action de T^2 . Si F est un fibré vectoriel T^2 -linéarisé sur $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$, chaque fibre $F(\xi_\mu)$ est une représentation de T^2 et on note F_μ la série correspondante par l'isomorphisme naturel entre $R(T^2)$ et $\mathbf{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$. On dispose alors de la version suivante de la formule de Bott :

Proposition 5.1.3 (Formule de Bott). — [Hai02, Proposition 3.2] Soit F un fibré vectoriel T^2 -linéarisé sur $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$. Alors :

$$\mathcal{F}_{Y(F)} = \sum_{\mu \vdash n} \frac{F_\mu \mathcal{F}_{P_n(\xi_\mu)}}{\prod_{x \in D(\mu)} (1 - t^{1+l(x)} q^{-a(x)})(1 - t^{-l(x)} q^{1+a(x)})},$$

où $a(x), l(x)$ désignent respectivement le bras et la jambe d'une case x du diagramme de Young.

La connexion entre les schémas de Hilbert et les polynômes de Macdonald apparaît dans le résultat suivant :

Théorème 5.1.4 (Haiman). — [Hai02, Proposition 3.4] *Pour toute partition μ de n , on a :*

$$\mathcal{F}_{P_n(\xi_\mu)} = \tilde{H}_\mu.$$

Remarque 5.1.5. — En observant que les algèbres $P_n(\xi_\mu)$ sont des quotients de $\mathcal{O}(\mathbf{C}^{2n})$, on déduit les conjectures d'intégralité et de positivité de Macdonald (théorème 2.3.5) : les coefficients $\tilde{K}_{\lambda,\mu}$ sont des polynômes à coefficients entiers positifs en t, q .

5.2. Action des fibrés linéarisés

En reprenant les méthodes de Haiman puisées dans les divers articles déjà cités, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 5.2.1. — *Soit F un fibré T^2 -linéarisé sur $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ et notons $F_\mu \in \mathbf{Q}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ les représentations associées à l'action sur les fibres en chaque point fixe ξ_μ . Soit l'opérateur $\nabla_F : \Lambda_{\mathbf{Q}(q,t)}^n \longrightarrow \Lambda_{\mathbf{Q}(q,t)}^n$ défini par :*

$$\nabla_F \tilde{H}_\mu = F_\mu \tilde{H}_\mu \quad \forall \mu \vdash n,$$

et soit $\mathcal{E}_F : \Lambda^n \longrightarrow \Lambda^n$ l'opérateur défini par :

$$\mathcal{E}_F = (\omega \nabla_F^* \omega)_{q=1, t=1}$$

où ∇_F^ désigne l'opérateur adjoint de ∇ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors on a dans $K(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$:*

$$F \otimes \Theta(y) = \Theta(\mathcal{E}_F(y)) \quad \forall y \in \Lambda^n.$$

Démonstration. — La formule de Bott (proposition 5.1.3) et le théorème de Haiman 5.1.4 donnent les formule suivantes pour tout fibré T^2 -linéarisé G :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\Upsilon(F)} &= \sum_{\mu \vdash n} \frac{F_\mu \tilde{H}_\mu}{\prod_{x \in D(\mu)} (1 - t^{1+l(x)} q^{-a(x)})(1 - t^{-l(x)} q^{1+a(x)})}, \\ \mathcal{F}_{\Upsilon(F \otimes G)} &= \sum_{\mu \vdash n} \frac{F_\mu G_\mu \tilde{H}_\mu}{\prod_{x \in D(\mu)} (1 - t^{1+l(x)} q^{-a(x)})(1 - t^{-l(x)} q^{1+a(x)})}. \end{aligned}$$

Par définition de l'opérateur ∇_F , cela signifie :

$$\mathcal{F}_{\Upsilon(F \otimes G)} = \nabla_F \mathcal{F}_{\Upsilon(G)}.$$

Les modules ou combinaisons linéaires formelles de modules dans $K_{S_n \times T^2}(A_n)$ $\Upsilon(G)$ et $\Upsilon(F \otimes G)$ admettent des résolutions libres $S_n \times T^2$ -équivariantes finies

fournissant des décompositions dans le groupe de Grothendieck, ce qui montre que leurs séries de Frobenius satisfont des équations de la forme :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\Upsilon(G)} &= \mathcal{F}_{A_n} \otimes R_G(q, t), \\ \mathcal{F}_{\Upsilon(F \otimes G)} &= \mathcal{F}_{A_n} \otimes R_{FG}(q, t),\end{aligned}$$

avec $R_G(q, t), R_{FG}(q, t) \in \Lambda_{\mathbf{Q}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]}^n$. Le passage par l'isomorphisme de Thom dans la définition de Θ signifie alors (on ne conserve qu'une fibre et on oublie l'action de T^2) :

$$\begin{aligned}\Theta^{-1}(G) &= R_G(1, 1), \\ \Theta^{-1}(F \otimes G) &= R_{FG}(1, 1).\end{aligned}$$

L'équation à résoudre est :

$$\mathcal{F}_{A_n} \otimes R_{FG}(q, t) = \nabla_F(\mathcal{F}_{A_n} \otimes R_G(q, t)).$$

En utilisant la formule $\mathcal{F}_{A_n} = s_{(n)} \left[\frac{X}{(1-t)(1-q)} \right]$ (voir [Hai02, Lemme 3.2]), cette équation devient :

$$s_{(n)} \left[\frac{X}{(1-t)(1-q)} \right] \otimes R_{FG}(q, t) = \nabla_F(\mathcal{F}_{A_n} \otimes R_G(q, t)).$$

De la formule $p_\lambda \otimes p_\mu = z_\lambda \delta_{\lambda, \mu} p_\lambda$ (voir Manivel [Man98]) on déduit la relation pléthystique suivante :

$$\begin{aligned}(p_\lambda \otimes p_\mu) \left[\frac{X}{(1-t)(1-q)} \right] &= p_\lambda \otimes \left(p_\mu \left[\frac{X}{(1-t)(1-q)} \right] \right) \\ &= \left(p_\lambda \left[\frac{X}{(1-t)(1-q)} \right] \right) \otimes p_\mu\end{aligned}$$

qui s'étend par bilinéarité et fournit la résolution de l'équation :

$$R_{FG}(q, t) = \left(\nabla_F(\mathcal{F}_{A_n} \otimes R_G(q, t)) \right) [X(1-t)(1-q)]$$

(puisque $s_{(n)}$ est le neutre pour le produit tensoriel).

D'après la formule de dualité (proposition 2.3.4), l'opérateur adjoint ∇_F^* vérifie⁽¹⁾ :

$$\nabla_F^*(\omega \tilde{H}_\mu[X(1-t)(1-q)]) = F_\mu \omega \tilde{H}_\mu[X(1-t)(1-q)].$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}(\nabla_F \tilde{H}_\mu)[X(1-t)(1-q)] &= F_\mu \tilde{H}_\mu[X(1-q)(1-t)] \\ &= (\omega \nabla_F^* \omega) \left(\tilde{H}_\mu[X(1-t)(1-q)] \right).\end{aligned}$$

⁽¹⁾On observera que l'opérateur ω commute aux pléthysmes utilisés.

En étendant cette relation par linéarité on trouve :

$$(\nabla_F f)[X(1-t)(1-q)] = (\omega \nabla_F^* \omega)(f[X(1-t)(1-q)]) \quad \forall f.$$

En appliquant à $f = \mathcal{F}_{A_n} \otimes R_G(q, t)$ on obtient, en utilisant à nouveau le transfert de pléthysme dans le produit tensoriel :

$$\begin{aligned} R_{FG}(q, t) &= (\omega \nabla_F^* \omega)((\mathcal{F}_{A_n} \otimes R_G(q, t))[X(1-t)(1-q)]) \\ &= (\omega \nabla_F^* \omega)R_G(q, t). \end{aligned}$$

Par évaluation en $t = 1, q = 1$ (voir la remarque suivant cette démonstration) ceci nous donne finalement :

$$R_{FG}(1, 1) = \mathcal{E}_F R_G(1, 1),$$

soit pour tout G :

$$\Theta^{-1}(F \otimes G) = \mathcal{E}_F(\Theta^{-1}(G)),$$

ou de manière équivalente, puisque les fibrés linéarisés P_λ forment une base de $K(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ d'après la proposition 3.3.2 :

$$F \otimes \Theta(y) = \Theta(\mathcal{E}_F y) \quad \forall y \in \Lambda^n.$$

□

Remarque 5.2.2. — Pour un opérateur $\Lambda_{\mathbf{Q}(q,t)}^n \rightarrow \Lambda_{\mathbf{Q}(q,t)}^n$ défini dans la base des polynômes de Macdonald modifiés \tilde{H}_μ , la restriction « $t = q = 1$ » n'est bien sûr pas toujours possible. Dans le cas où l'opérateur se restreint en un opérateur sur le sous-réseau $\Lambda_{\mathbf{Q}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]}^n$, on peut penser utiliser, en raison du résultat d'intégralité de Macdonald (théorème 2.3.5), le changement de base $\tilde{H}_\mu = \sum_{\lambda \vdash n} \tilde{K}_{\lambda, \mu} s_\lambda$, mais cela ne fonctionne pas car le déterminant de ce changement de base n'est pas inversible dans l'anneau $\mathbf{Q}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ (par exemple, pour $n = 2$ ce déterminant vaut $t - q$). Autrement dit, la famille des polynômes de Macdonald modifiés \tilde{H}_μ forme une famille libre du sous-réseau $\Lambda_{\mathbf{Q}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]}^n$ de $\Lambda_{\mathbf{Q}(q,t)}^n$, mais n'est pas une base. Dans les cas qui nous concernent, l'opérateur ∇_F provient déjà d'un opérateur $\mathcal{E}_F : \Lambda^n \rightarrow \Lambda^n$ existant, étendu d'abord en un opérateur sur $\Lambda_{\mathbf{Q}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]}^n$ en utilisant les polynômes \tilde{H}_μ , puis considéré comme un opérateur sur $\Lambda_{\mathbf{Q}(q,t)}^n$. Donc l'évaluation $t = q = 1$ est possible, à condition de simplifier convenablement les fractions rationnelles qui apparaissent.

5.3. Cas du fibré tautologique

Nous considérons maintenant le problème du calcul explicite d'un opérateur \mathcal{E}_F dans la base des fonctions de Schur ou dans la base des fonctions de Newton.

Un entier n étant fixé, en notant \tilde{K} la matrice de passage de la base des fonctions de Schur à la base des polynômes de Macdonald modifiés \tilde{H} , on observe que la matrice de l'opérateur \mathcal{E}_F dans la base des fonctions de Schur s'exprime comme :

$$\text{Mat}(\mathcal{E}_F, (s_\lambda)) = \omega(K \cdot \text{Diag}(F_\mu) \cdot K^{-1})_{t=1, q=1}^\top \omega.$$

où $(\cdot)^\top$ désigne la matrice transposée (cette formule n'est évaluable qu'avec précaution, voir la remarque au-dessus).

Concernant l'opérateur \mathcal{E}_{B_n} associé au fibré tautologique, nous pouvons obtenir une expression explicite. La définition de l'opérateur ∇_{B_n} étant identique pour tout entier n , nous abrégeons ici la notation en posant simplement $\nabla := \nabla_{B_n}$ pour tout n : on obtient un opérateur défini globalement sur $\Lambda_{\mathbf{Q}(q,t)}$. Similairement, nous notons simplement \mathcal{E} l'opérateur \mathcal{E}_{B_n} pour chaque n .

On observe que la représentation $B_n(\xi_\mu)$ est le polynôme B_μ défini au §2.1 donc l'opérateur ∇ est défini par :

$$\nabla \tilde{H}_\mu = B_\mu \tilde{H}_\mu.$$

Puisque l'opérateur Δ (voir au chapitre 2) est caractérisé par :

$$\Delta \tilde{H}_\mu = (1 - (1 - q)(1 - t)B_\mu) \tilde{H}_\mu,$$

on a :

$$\nabla = \frac{1}{(1 - q)(1 - t)} (id - \Delta),$$

donc d'après la proposition 2.3.3 :

$$\nabla f = \frac{1}{(1 - q)(1 - t)} \left(f - f \left[X + \frac{(1 - t)(1 - q)}{z} \right] \Omega[-zX] \right) \Big|_{z^0}.$$

Nous commençons par calculer une formule pléthystique pour l'opérateur $\omega \nabla^* \omega$:

Proposition 5.3.1. — *L'opérateur $\omega \nabla^* \omega$ est défini par :*

$$(\omega \nabla^* \omega)(f) = \frac{1}{(1 - t)(1 - q)} \left(f - f \left[X + \frac{1}{z} \right] \Omega[-zX(1 - t)(1 - q)] \right) \Big|_{z^0}.$$

Démonstration. — La formule de dualité (proposition 2.3.4) entraîne :

$$\nabla^* (\omega \tilde{H}_\mu [X(1 - t)(1 - q)]) = B_\mu \omega \tilde{H}_\mu [X(1 - t)(1 - q)].$$

En posant $S_\mu := \tilde{H}_\mu[X(1-t)(1-q)]$ on a donc :

$$\begin{aligned} (\omega \nabla^* \omega) S_\mu &= B_\mu S_\mu \\ &= (B_\mu \tilde{H}_\mu)[X(1-t)(1-q)]. \end{aligned}$$

Par définition de ∇ on a :

$$B_\mu \tilde{H}_\mu = \frac{1}{(1-t)(1-q)} \left(\tilde{H}_\mu - \tilde{H}_\mu \left[X + \frac{(1-t)(1-q)}{z} \right] \Omega[-zX] \right) \Big|_{z^0}.$$

On effectue la substitution pléthystique $[X(1-t)(1-q)]$:

$$B_\mu S_\mu = \frac{1}{(1-t)(1-q)} \left(S_\mu - \tilde{H}_\mu \left[X + \frac{(1-t)(1-q)}{z} \right] [X(1-t)(1-q)] \cdot \Omega[-zX][X(1-t)(1-q)] \right) \Big|_{z^0}.$$

Par associativité du pléthysme on obtient :

$$B_\mu S_\mu = \frac{1}{(1-t)(1-q)} \left(S_\mu - \tilde{H}_\mu \left[X(1-t)(1-q) + \frac{(1-t)(1-q)}{z} \right] \cdot \Omega[-zX][X(1-t)(1-q)] \right) \Big|_{z^0}.$$

On observe que :

$$\Omega[-zX][X(1-t)(1-q)] = \Omega[-zX(1-t)(1-q)].$$

En reprenant $\tilde{H}_\mu = S_\mu \left[\frac{X}{(1-t)(1-q)} \right]$ on trouve :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\mu \left[X(1-t)(1-q) + \frac{(1-t)(1-q)}{z} \right] &= S_\mu \left[\frac{X}{(1-t)(1-q)} \right] \left[X(1-t)(1-q) + \frac{(1-t)(1-q)}{z} \right] \\ &= S_\mu \left[X + \frac{1}{z} \right]. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(\omega \nabla^* \omega) S_\mu = \frac{1}{(1-t)(1-q)} \left(S_\mu - S_\mu \left[X + \frac{1}{z} \right] \Omega[-zX(1-t)(1-q)] \right) \Big|_{z^0},$$

dont le résultat découle par linéarité. \square

Nous déduisons alors une première formule pour l'opérateur \mathcal{E} :

Proposition 5.3.2. — *Pour toute partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{l(\lambda)})$,*

$$\mathcal{E}(p_\lambda) = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, l(\lambda)\} \\ I \neq \emptyset}} |\lambda_I| p_{|\lambda_I|} p_{\lambda_{\bar{I}}}$$

où I désigne un choix de parts, λ_I la partition obtenue en conservant ces parts, $\lambda_{\bar{I}}$ la partition complémentaire et $|\lambda_I|$ la somme des parts.

Démonstration. — Partant de l'expression pléthystique de l'opérateur $\omega \nabla^* \omega$:

$$(\omega \nabla^* \omega) f = \frac{1}{(1-q)(1-t)} \left(f - f \left[X + \frac{1}{z} \right] \Omega[-zX(1-q)(1-t)] \right) \Big|_{z^0},$$

on calcule dans la base $\{p_\lambda\}$. Pour une partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{l(\lambda)})$ on a :

$$\begin{aligned} (\omega \nabla^* \omega) p_\lambda &= \frac{1}{(1-t)(1-q)} \left(p_\lambda - \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \left(p_{\lambda_i} + \frac{1}{z^{\lambda_i}} \right) \exp \sum_{r \geq 1} \frac{-z^r (1-t^r)(1-q^r)}{r} p_r \right) \Big|_{z^0} \\ &= \frac{1}{(1-t)(1-q)} \left(p_\lambda - \sum_{I \subset \{1, \dots, l(\lambda)\}} \prod_{j \notin I} \frac{p_{\lambda_j}}{z^{\lambda_j}} \prod_{r \geq 1} \sum_{m_r \geq 0} \frac{(-1)^{m_r} z^{r m_r} (1-t^r)^{m_r} (1-q^r)^{m_r}}{m_r! r^{m_r}} p_r^{m_r} \right) \Big|_{z^0} \end{aligned}$$

Pour $I = \emptyset$, on obtient p_λ dans la somme, donc ce terme s'annule avec le p_λ présent, d'où :

$$(\omega \nabla^* \omega) p_\lambda = - \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, l(\lambda)\} \\ I \neq \emptyset}} p_{\lambda_I} \sum_{|\mu| = |\lambda_I|} (-1)^{l(\mu)} \frac{1}{z_\mu} \prod_{r \geq 1} \frac{(1-t^r)^{m_r} (1-q^r)^{m_r}}{(1-t)(1-q)} p_\mu,$$

en notant $\mu = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots)$. Quand on évalue en $t = q = 1$, si la partition μ a plus de deux parts non nulles le terme correspondant est nul. Il ne reste donc que le cas où μ est la partition $(|\lambda_I|)$ et ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} p_\lambda &= \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, l(\lambda)\} \\ I \neq \emptyset}} p_{\lambda_I} \frac{1}{z_{|\lambda_I|}} |\lambda_I|^2 p_{|\lambda_I|} \\ &= \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, l(\lambda)\} \\ I \neq \emptyset}} |\lambda_I| p_{|\lambda_I|} p_{\lambda_I}. \end{aligned}$$

□

La formule précédente peut encore être améliorée :

Corollaire 5.3.3. — *Soit l'opérateur différentiel sur Λ :*

$$\mathcal{E} = \left(\sum_{r \geq 1} r p_r t^r \right) \exp \left(\sum_{r \geq 1} \frac{\partial}{\partial p_r} t^{-r} \right) \Big|_{t^0}.$$

Alors on a dans $K(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$:

$$B_n \otimes \Theta(y) = \Theta(\mathcal{E}(y)) \quad \forall y \in \Lambda^n.$$

Démonstration. — Seul est à montrer que cette nouvelle formule pour l'opérateur \mathcal{E} est équivalente à la précédente. Développons l'expression de

l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \left(\sum_{r \geq 1} r p_r t^r \right) \left(1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \left(\sum_{r \geq 1} \frac{\partial}{\partial p_r} t^{-r} \right)^k \right) \Big|_{z^0} \\
&= \left(\sum_{r \geq 1} r p_r t^r \right) \left(1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \sum_{n_1, \dots, n_k \geq 1} \frac{\partial}{\partial p_{n_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial p_{n_k}} t^{-(n_1 + \dots + n_k)} \right) \Big|_{z^0} \\
&= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \sum_{n_1, \dots, n_k \geq 1} (n_1 + \dots + n_k) p_{n_1 + \dots + n_k} \frac{\partial}{\partial p_{n_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial p_{n_k}}.
\end{aligned}$$

Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{l(\lambda)}) = (1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \dots)$ une partition. Dans le calcul de $\mathcal{E}(p_\lambda)$ avec cette dernière formule, seuls les k -uplets (n_1, \dots, n_k) formés de parts de λ répétées avec une multiplicité moindre dans ce k -uplet que dans λ contribuent à la somme : pour les autres, on a $\frac{\partial}{\partial p_{n_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial p_{n_k}} p_\lambda = 0$. On peut donc indexer les k -uplets par les choix de k lignes dans λ :

$$I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, l(\lambda)\} \text{ sous-ensemble à } k \text{ éléments,}$$

et on pose : $n_1 = \lambda_{i_1}, \dots, n_k = \lambda_{i_k}$. On parcourt ainsi tous les k -uplets intervenants mais il faut multiplier par $k!$ pour permuter les parts (les k -uplets ne sont pas ordonnés) et diviser par le défaut d'injectivité de l'association $I \mapsto \lambda_I$ où λ_I désigne la sous-partition de λ obtenue en ne conservant que les parts sélectionnées par I . En notant $\lambda_I = (1^{\alpha_1^I}, 2^{\alpha_2^I}, \dots)$ on voit que ce défaut d'injectivité est :

$$\prod_{j \geq 1} \frac{\alpha_j!}{(\alpha_j - \alpha_j^I)!}.$$

Ainsi,

$$\mathcal{E}(p_\lambda) = \sum_{k \geq 1} \sum_{|I|=k} \prod_{j \geq 1} \frac{(\alpha_j - \alpha_j^I)!}{\alpha_j!} |\lambda_I| p_{|\lambda_I|} \frac{\partial}{\partial p_{\lambda_{i_1}}} \cdots \frac{\partial}{\partial p_{\lambda_{i_k}}} p_\lambda.$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p_{\lambda_{i_1}}} \cdots \frac{\partial}{\partial p_{\lambda_{i_k}}} p_\lambda &= \prod_{j \geq 1} \frac{\partial^{\alpha_j^I}}{\partial p_j^{\alpha_j^I}} p_j^{\alpha_j} \\
&= \prod_{j \geq 1} \frac{\alpha_j!}{(\alpha_j - \alpha_j^I)!} p_j^{\alpha_j - \alpha_j^I}.
\end{aligned}$$

En notant \bar{I} les parts non sélectionnées dans I , on a donc :

$$\frac{\partial}{\partial p_{\lambda_{i_1}}} \cdots \frac{\partial}{\partial p_{\lambda_{i_k}}} p_\lambda = \prod_{j \geq 1} \frac{\alpha_j!}{(\alpha_j - \alpha_j^I)!} p_{\lambda_{\bar{I}}},$$

et finalement la formule obtenue dans la proposition 5.3.2 :

$$\mathcal{E}(p_\lambda) = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, l(\lambda)\} \\ I \neq \emptyset}} |\lambda_I| p_{|\lambda_I|} p_{\lambda_{\bar{I}}}.$$

□

Ce résultat est comparable au théorème de Lehn sur l'isomorphisme Ψ :

Théorème 5.3.4 (Lehn). — [LS01, Théorème 4.1] *Soit l'opérateur différentiel sur Λ :*

$$\mathcal{D} = \left(- \sum_{r \geq 1} p_r t^r \right) \exp \left(- \sum_{r \geq 1} r \frac{\partial}{\partial p_r} t^{-r} \right) \Big|_{t^0}.$$

Alors on a dans $H^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$:

$$ch(B_n) \cup \Psi(y) = \Psi(\mathcal{D}(y)) \quad \forall y \in \Lambda^n.$$

Un calcul identique à celui présenté pour l'opérateur \mathcal{E} (corollaire 5.3.3) donne :

Proposition 5.3.5. — *Pour toute partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{l(\lambda)})$,*

$$\mathcal{D}(p_\lambda) = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, l(\lambda)\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|-1} \langle \lambda_I \rangle p_{|\lambda_I|} p_{\lambda_{\bar{I}}},$$

où $|I|$ désigne le cardinal de I et $\langle \lambda_I \rangle$ le produit des parts.

Considérons la situation suivante :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^n & \xrightarrow[\sim]{\Psi} & H^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \\ \uparrow \Gamma & & \uparrow ch \\ \Lambda^n & \xrightarrow[\sim]{\Theta} & K(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \end{array}$$

Le fibré B_n agit sur $K(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ par produit tensoriel et $ch(B_n)$ agit sur $H^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ par produit cup. Les opérateurs \mathcal{D} et \mathcal{E} jouent des rôles identiques dans la compréhension du produit induit par le produit cup via Ψ (résolu par Lehn-Sorger [LS01]) et l'étude du produit induit par le produit

tensoriel via Θ , apportant un début de réponse à la question de Nakajima [Nak96b, Question 4.23].

Terminons cette étude par l'observation élémentaire suivante :

$$\mathcal{E} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Lambda^n \end{array} \xrightarrow{\Gamma} \Lambda^n \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \mathcal{D} \end{array}$$

Proposition 5.3.6. — *L'opérateur Γ conjugue les opérateurs \mathcal{D} et \mathcal{E} :*

$$\Gamma \circ \mathcal{E} = \mathcal{D} \circ \Gamma.$$

Démonstration. — D'après le corollaire 5.3.3 :

$$\Theta(\mathcal{E}(y)) = B_n \otimes \Theta(y) \quad \forall y \in \Lambda^n,$$

donc puisque le caractère de Chern est un morphisme d'algèbres :

$$(ch \circ \Theta)(\mathcal{E}(y)) = ch(B_n) \cup (ch \circ \Theta)(y).$$

Puisque $ch \circ \Theta = \Psi \circ \Gamma$ on obtient en utilisant le théorème 5.3.4 :

$$\begin{aligned} (\Psi \circ \Gamma)(\mathcal{E}(y)) &= ch(B_n) \cup (\Psi \circ \Gamma)(y) \\ &= \Psi(\mathcal{D}\Gamma y). \end{aligned}$$

Puisque Ψ est un isomorphisme, cela signifie : $\Gamma \circ \mathcal{E} = \mathcal{D} \circ \Gamma$. \square

5.4. Application : résolution des anneaux de polygraphes

On peut découvrir l'opérateur \mathcal{E} en cherchant une résolution libre de certains A_n -modules de type fini : les anneaux de coordonnées des polygraphes.

5.4.1. Polygraphes. —

Définition 5.4.1. — Soit E un ensemble et n, ℓ deux entiers positifs, $n \geq 1$. Le *polygraphe* $Z(n, \ell)$ est le sous-ensemble de $E^n \times E^\ell$ défini par :

$$Z(n, \ell) := \{(P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_\ell) \mid Q_i \in \{P_1, \dots, P_n\} \forall i = 1, \dots, \ell\}.$$

On convient que $Z(n, 0) = E^n$.

Soit une application $f : \{1, \dots, \ell\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. On construit une application :

$$\pi_f : E^n \rightarrow E^\ell$$

définie par :

$$\pi_f(P_1, \dots, P_n) = (P_{f(1)}, \dots, P_{f(\ell)}).$$

Son graphe est le lieu $W_f \subset E^n \times E^\ell$ défini par :

$$W_f = \{(P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_\ell) \mid Q_i = P_{f(i)} \forall i = 1, \dots, \ell\}.$$

Ainsi, on voit que :

$$Z(n, \ell) = \bigcup_f W_f,$$

où la réunion porte sur toutes les applications f . Ceci explique le terme *polygraphe*.

Prenons $E = \mathbf{C}^2$ et fixons sur $E^n \times E^\ell = (\mathbf{C}^2)^n \times (\mathbf{C}^2)^\ell$ les coordonnées suivantes :

$$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a}, \mathbf{b} = x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, a_1, b_1, \dots, a_\ell, b_\ell$$

où x_j, y_j sont les coordonnées du j -ième facteur dans E^n et a_i, b_i les coordonnées du i -ième facteur dans E^ℓ . Dans ces coordonnées, un graphe W_f est un sous-ensemble de $\mathbf{C}^{2n+2\ell}$ défini par des équations linéaires, d'idéal $I_f = I(W_f) \subset \mathbf{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a}, \mathbf{b}]$ défini par :

$$\begin{aligned} I_f &= \langle a_i - x_{f(i)}, b_i - y_{f(i)} \mid i = 1, \dots, \ell \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} \langle a_i - x_{f(i)}, b_i - y_{f(i)} \rangle. \end{aligned}$$

On a alors :

$$V(I_f) = V(I(W_f)) = W_f.$$

Ainsi, puisque $Z(n, \ell) = \bigcup_f W_f$, $Z(n, \ell)$ est une sous-variété algébrique de $\mathbf{C}^{2n+2\ell}$ de la forme $Z(n, \ell) = V(J(n, \ell))$ où $J(n, \ell)$ est l'idéal de $\mathbf{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a}, \mathbf{b}]$ donné par :

$$J(n, \ell) = \prod_f I_f.$$

En effet, on a :

$$Z(n, \ell) = \bigcup_f W_f = \bigcup_f V(I_f) = V\left(\prod_f I_f\right).$$

L'idéal de la sous-variété $Z(n, \ell)$ est donné par :

$$I(n, \ell) = I(Z(n, \ell)) = I\left(\bigcup_f W_f\right) = \bigcap_f I(W_f) = \bigcap_f I_f.$$

En général, les idéaux $I(n, \ell)$ et $J(n, \ell)$ sont distincts.

Définition 5.4.2. — On appelle *anneau de polygraphe* l'anneau des coordonnées sur le polygraphe $Z(n, \ell)$:

$$R(n, \ell) = \mathcal{O}(Z(n, \ell)) = \mathbf{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] / I(n, \ell).$$

Soit $\pi : Z(n, \ell) \rightarrow (\mathbf{C}^2)^n$ la projection canonique. Elle induit un morphisme d'anneaux $\pi^* : \mathbf{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \rightarrow R(n, \ell)$ qui fait de $R(n, \ell)$ un $\mathbf{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ -module de type fini. En effet, il est équivalent de voir que l'extension donnée par π^* est entière : pour tout polynôme P et toute fonction $f : \{1, \dots, \ell\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, en notant $P_f \in \mathbf{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ la substitution $a_i = x_{f(i)}, b_i = y_{f(i)}$ dans P , on a $\prod_f (P - P_f) \in I(n, \ell)$ qui induit une équation polynomiale unitaire dans $R(n, \ell)$.

Problématique, première version. — Calculer une résolution libre de $R(n, \ell)$ par des $\mathbf{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ -modules libres de type fini.

En fait, on cherche plus. Le groupe symétrique S_n agit sur $\mathbf{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ par permutation sur les indéterminées x_i et y_i , et sur $\mathbf{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a}, \mathbf{b}]$ en laissant invariantes les indéterminées a_i, b_i . L'idéal $I(n, \ell)$ est invariant pour cette action, ce qui munit l'anneau $R(n, \ell)$ de l'action de S_n induite. La projection π est S_n -équivariante, donc finalement $R(n, \ell)$ est un $\mathbf{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ -module de type fini S_n -équivariant.

Problématique, deuxième version. — Calculer une résolution libre S_n -équivariante de $R(n, \ell)$.

On va chercher en fait des résolutions encore plus précises. On munit l'anneau $\mathbf{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a}, \mathbf{b}]$ d'une bigraduation par le degré en \mathbf{x}, \mathbf{a} d'une part et le degré en \mathbf{y}, \mathbf{b} d'autre part. De manière équivalente, on peut considérer l'action du tore $T^2 = (\mathbf{C}^*)^2$ telle que $(t, q) \in T$ agit par multiplication par t sur les indéterminées \mathbf{x}, \mathbf{a} et par multiplication par q sur les indéterminées \mathbf{y}, \mathbf{b} . Les idéaux I_f sont doublement homogènes, donc $I(n, \ell)$ aussi et l'anneau $R(n, \ell)$ hérite de la double graduation. Finalement, $R(n, \ell)$ est un $\mathbf{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ -module de type fini S_n -équivariant et bigradué, ou de manière équivalente un $\mathbf{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ -module de type fini $S_n \times T^2$ -équivariant.

Problématique, troisième version. — Calculer une résolution libre S_n -équivariante bigraduée de $R(n, \ell)$.

Dans les deux sous-sections qui suivent, à titre d'exemple, nous traitons à la main deux cas simples pour lesquels je tiens à remercier Duco Van Straten. La dernière section explique le rôle joué par l'opérateur \mathcal{E} dans ce travail.

5.4.2. Etude de $R(2, 1)$. — Puisque $l = 1$, on note $a = a_1, b = b_1$. L'anneau $\mathbf{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] \cong \mathbf{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}][a, b]$ est engendré, comme $\mathbf{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ -module, par tous les monômes $a^u b^v$. L'idéal $I(2, 1)$ est ici :

$$I(2, 1) = (x_1 - a, y_1 - b) \cap (x_2 - a, y_2 - b).$$

Cet idéal a 4 générateurs :

$$E_1 = (x_1 - a)(x_2 - a)$$

$$E_2 = (x_1 - a)(y_2 - b)$$

$$E_3 = (y_1 - b)(x_2 - a)$$

$$E_4 = (y_1 - b)(y_2 - b)$$

ce qui donne dans l'anneau $R(2, 1)$ les relations suivantes :

$$E_1 = a^2 - a(x_1 + x_2) + x_1x_2 = 0$$

$$E_2 = ab - ay_2 - bx_1 + x_1y_2 = 0$$

$$E_3 = ab - ay_1 - bx_2 + x_2y_1 = 0$$

$$E_4 = b^2 - b(y_1 + y_2) + y_1y_2 = 0$$

Ces relations montrent que tous les monômes $a^u b^v$ se réduisent dans le module $R(2, 1)$ dès qu'ils contiennent a^2, b^2 ou ab , donc $R(2, 1)$ est engendré par $1, a, b$ sur $\mathbf{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$.

Notons $A_2 := \mathbf{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbf{C}[x_1, y_1, x_2, y_2]$. On a donc un morphisme surjectif de A_2 -modules :

$$\begin{array}{rclcl} A_2 \otimes \mathbf{C}^3 & \longrightarrow & R(2, 1) & \longrightarrow & 0 \\ 1 \otimes \varepsilon_1 & \longmapsto & 1 & & \\ 1 \otimes \varepsilon_2 & \longmapsto & a & & \\ 1 \otimes \varepsilon_3 & \longmapsto & b & & \end{array}$$

où $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ désigne la base canonique de \mathbf{C}^3 . Puisque les générateurs $1, a, b$ sont invariants sous S_2 , ce morphisme est S_2 -équivariant si l'on fait agir S_2 trivialement sur \mathbf{C}^3 . Autrement dit, en notant V_0 la représentation triviale de S_2 , on a un morphisme surjectif de A_2 -modules S_2 -équivariants :

$$A_2 \otimes V_0^{\oplus 3} \longrightarrow R(2, 1) \longrightarrow 0$$

La seule relation entre les générateurs $1, a, b$ est obtenue en faisant $E_2 - E_3$:

$$E_2 - E_3 = a(y_1 - y_2) + b(x_2 - x_1) + (x_1y_2 - x_2y_1)$$

ce qui fournit la présentation :

$$A_2 \otimes \mathbf{C} \xrightarrow{\phi} A_2 \otimes \mathbf{C}^3 \longrightarrow R(2, 1) \longrightarrow 0$$

où le morphisme ϕ est défini par la matrice :

$$\begin{pmatrix} (x_1y_2 - x_2y_1) & (y_1 - y_2) & (x_2 - x_1) \end{pmatrix}.$$

Soit ε le vecteur de base de \mathbf{C} et notons $S_2 = \{id, \tau_{1,2}\}$. Si l'on fait agir S_2 sur \mathbf{C} par les formules :

$$\begin{aligned} id.\varepsilon &= \varepsilon, \\ \tau_{1,2}\varepsilon &= -\varepsilon, \end{aligned}$$

le morphisme ϕ devient S_2 -équivariant puisque $\tau_{1,2}\phi = -\phi$. Ainsi, l'action que l'on obtient sur \mathbf{C} est la représentation alternée V_1 de S_2 . Puisque ϕ est injectif, on a trouvé la résolution S_2 -équivariante de $R(2,1)$ suivante :

$$0 \longrightarrow A_2 \otimes V_1 \longrightarrow A_2 \otimes V_0^{\oplus 3} \longrightarrow R(2,1) \longrightarrow 0$$

La représentation virtuelle de S_2 associée au module $R(2,1)$ est donc :

$$R_2^1 := 3V_0 - V_1 \in R(S_2).$$

C'est une représentation de rang 2.

5.4.3. Etude de $R(3,1)$. — Dans l'anneau $\mathbf{C}[x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, a, b]$, l'idéal $I(3,1)$ est :

$$I(3,1) = (x_1 - a, y_1 - b) \cap (x_2 - a, y_2 - b) \cap (x_3 - a, y_3 - b)$$

et admet pour générateurs :

$$\begin{aligned} E_1 &= (y_1 - b)(y_2 - b)(y_3 - b) \\ E_2 &= (x_1 - a)(y_2 - b)(y_3 - b) \\ E_3 &= (x_2 - a)(y_1 - b)(y_3 - b) \\ E_4 &= (x_3 - a)(y_1 - b)(y_2 - b) \\ E_5 &= (x_1 - a)(x_2 - a)(y_3 - b) \\ E_6 &= (x_1 - a)(x_3 - a)(y_2 - b) \\ E_7 &= (x_2 - a)(x_3 - a)(y_1 - b) \\ E_8 &= (x_1 - a)(x_2 - a)(x_3 - a) \end{aligned}$$

En développant, on trouve les relations dans $R(3, 1)$:

$$\begin{aligned}
E_1 &= -b^3 + b^2(y_1 + y_2 + y_3) - b(y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3) + y_1y_2y_3 = 0 \\
E_2 &= -ab^2 + ab(y_2 + y_3) + b^2x_1 - ay_2y_3 - b(x_1y_2 + x_1y_3) + x_1y_2y_3 = 0 \\
E_3 &= -ab^2 + ab(y_1 + y_3) + b^2x_2 - ay_1y_3 - b(x_2y_1 + x_2y_3) + x_2y_1y_3 = 0 \\
E_4 &= -ab^2 + ab(y_1 + y_2) + b^2x_3 - ay_1y_2 - b(x_3y_1 + x_3y_2) + x_3y_1y_2 = 0 \\
E_5 &= -a^2b + ab(x_1 + x_2) + a^2y_3 - bx_1x_2 - a(x_1y_3 + x_2y_3) + x_1x_2y_3 = 0 \\
E_6 &= -a^2b + ab(x_1 + x_3) + a^2y_2 - bx_1x_3 - a(x_1y_2 + x_3y_2) + x_1x_3y_2 = 0 \\
E_7 &= -a^2b + ab(x_2 + x_3) + a^2y_1 - bx_2x_3 - a(x_2y_1 + x_3y_1) + x_2x_3y_1 = 0 \\
E_8 &= -a^3 + a^2(x_1 + x_2 + x_3) - a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + x_1x_2x_3 = 0
\end{aligned}$$

On en déduit que $R(3, 1)$ est engendré sur $A_3 := \mathbf{C}[x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3]$ par $1, a, b, a^2, ab, b^2$:

$$\begin{array}{rcl}
A_3 \otimes \mathbf{C}^6 & \longrightarrow & R(3, 1) \longrightarrow 0 \\
1 \otimes \varepsilon_1 & \longmapsto & 1 \\
1 \otimes \varepsilon_2 & \longmapsto & a \\
1 \otimes \varepsilon_3 & \longmapsto & b \\
1 \otimes \varepsilon_4 & \longmapsto & a^2 \\
1 \otimes \varepsilon_5 & \longmapsto & ab \\
1 \otimes \varepsilon_6 & \longmapsto & b^2
\end{array}$$

où $\{\varepsilon_i\}_{i=1, \dots, 6}$ désigne la base canonique de \mathbf{C}^6 . Puisque les générateurs sont S_3 -invariants, ce morphisme est équivariant si l'on fait agir S_3 trivialement sur \mathbf{C}^6 : en notant V_0 la représentation triviale de S_3 , on a donc un morphisme surjectif de A_3 -modules S_3 -équivariants :

$$A_3 \otimes V_0^{\oplus 6} \longrightarrow R(3, 1) \longrightarrow 0$$

Le premier module de syzygies est obtenu en regardant les relations entre les générateurs $1, a, b, a^2, ab, b^2$. Ces relations sont engendrées par les diverses

expressions de a^2b et ab^2 , donc par :

$$\begin{aligned}
F_1 &= E_2 - E_3 = ab(y_2 - y_1) + b^2(x_1 - x_2) - a(y_2y_3 - y_1y_3) \\
&\quad - b(x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 - x_2y_3) + (x_1y_2y_3 - x_2y_1y_3) \\
F_2 &= E_3 - E_4 = ab(y_3 - y_2) + b^2(x_2 - x_3) - a(y_1y_3 - y_1y_2) \\
&\quad - b(x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_1 - x_3y_2) + (x_2y_1y_3 - x_3y_1y_2) \\
F_3 &= E_5 - E_6 = ab(x_2 - x_3) + a^2(y_3 - y_2) - b(x_1x_2 - x_1x_3) \\
&\quad - a(x_1y_3 + x_2y_3 - x_1y_2 - x_3y_2) + (x_1x_2y_3 - x_1x_3y_2) \\
F_4 &= E_6 - E_7 = ab(x_1 - x_2) + a^2(y_2 - y_1) - b(x_1x_3 - x_2x_3) \\
&\quad - a(x_1y_2 + x_3y_2 - x_2y_1 - x_3y_1) + (x_1x_3y_2 - x_2x_3y_1)
\end{aligned}$$

ce qui fournit la présentation :

$$A_3^{\oplus 4} \xrightarrow{M_1} A_3^{\oplus 6} \longrightarrow R(3, 1) \longrightarrow 0$$

où M_1 est la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix}
x_1y_2y_3 - x_2y_1y_3 & x_2y_1y_3 - x_3y_1y_2 & x_1x_2y_3 - x_1x_3y_2 & x_1x_3y_2 - x_2x_3y_1 \\
y_1y_3 - y_2y_3 & y_1y_2 - y_1y_3 & \begin{pmatrix} x_1y_2 + x_3y_2 \\ -x_1y_3 - x_2y_3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_2y_1 + x_3y_1 \\ -x_1y_2 - x_3y_2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x_2y_1 + x_2y_3 \\ -x_1y_2 - x_1y_3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_3y_1 + x_3y_2 \\ -x_2y_1 - x_2y_3 \end{pmatrix} & x_1x_3 - x_1x_2 & x_2x_3 - x_1x_3 \\
0 & 0 & y_3 - y_2 & x_2x_3 - x_1x_3 \\
y_2 - y_1 & y_3 - y_2 & x_2 - x_3 & x_1 - x_2 \\
x_1 - x_2 & x_2 - x_3 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

ou de façon équivalente :

$$A_3 \otimes \mathbf{C}^4 \xrightarrow{M_1} A_3 \otimes \mathbf{C}^6 \longrightarrow R(3, 1) \longrightarrow 0$$

Le groupe S_3 agit sur les vecteurs F_1, F_2, F_3, F_4 de la manière suivante :

	F_1	F_2	F_3	F_4
id	F_1	F_2	F_3	F_4
$\tau = (12)$	$-F_1$	$F_1 + F_2$	$F_3 + F_4$	$-F_4$
(13)	$-F_2$	$-F_1$	$-F_4$	$-F_3$
(23)	$F_1 + F_2$	$-F_2$	$-F_3$	$F_3 + F_4$
$\sigma = (123)$	F_2	$-F_1 - F_2$	$-F_3 - F_4$	F_3
(231)	$-F_1 - F_2$	F_1	F_4	$-F_3 - F_4$

Cela définit une action $S_3 \rightarrow GL(\mathbf{C}^4)$ qui rend l'application M_1 équivariante. Pour déterminer cette représentation on calcule les traces :

$$\begin{aligned} tr(id) &= 4 \\ tr(\tau) &= tr \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \\ tr(\sigma) &= tr \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \end{aligned}$$

ce qui signifie que la représentation obtenue est $V_2^{\oplus 2}$, où V_2 désigne la représentation standard de S_3 (*i.e.* la sous-représentation irréductible non triviale de la représentation par permutation).

Pour le calcul du deuxième module de syzygies, le logiciel MACAULAY2 [GS] fournit la résolution :

$$0 \rightarrow A_3 \xrightarrow{M_2} A_3^{\oplus 4} \xrightarrow{M_1} A_3^{\oplus 6} \rightarrow R(3, 1) \rightarrow 0$$

où l'application M_2 est donnée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ x_1 - x_2 \\ y_2 - y_1 \\ y_2 - y_3 \end{pmatrix}$$

Cela signifie que F_1, F_2, F_3, F_4 sont liés par l'unique relation :

$$G = (x_3 - x_2) F_1 + (x_1 - x_2) F_2 + (y_2 - y_1) F_3 + (y_2 - y_3) F_4.$$

En tenant compte de l'action de S_3 sur les F_i , on trouve alors que l'action de S_3 sur G est donnée par :

$$\begin{aligned} id.G &= G \\ \tau.G &= -G \\ \sigma.G &= G \end{aligned}$$

Par exemple,

$$\begin{aligned}
\tau.G &= (x_3 - x_1)(-F_1) + (x_2 - x_1)(F_1 + F_2) \\
&\quad + (y_1 - y_2)(F_3 + F_4) + (y_1 - y_3)(-F_4) \\
&= (x_2 - x_3)F_1 + (x_2 - x_1)F_2 + (y_1 - y_2)F_3 + (y_3 - y_2)F_4 \\
&= -G.
\end{aligned}$$

Cela signifie que l'action est la représentation alternée V_1 de S_3 . Finalement, on a obtenu la résolution S_3 -équivariante :

$$0 \rightarrow A_3 \otimes V_1 \longrightarrow A_3 \otimes V_2^{\oplus 2} \longrightarrow A_3 \otimes V_0^{\oplus 6} \rightarrow R(3, 1) \rightarrow 0$$

La représentation virtuelle de S_3 associée au module $R(3, 1)$ est donc :

$$R_3^1 := 6V_0 - 2V_2 + V_1 \in R(S_3).$$

C'est une représentation de rang 3.

L'algèbre $A := A_3 = \mathbf{C}[x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3]$ est bigraduée en degrés totaux (i, j) en \mathbf{x} et \mathbf{y} . On note la décomposition en bidegré :

$$A = \bigoplus_{i, j \geq 0} A_{i, j}$$

et les décalages sont définis par :

$$A[u, v]_{i, j} = A_{u+i, v+j}.$$

L'action du groupe S_3 respecte la bigraduation.

En étant plus précis dans la résolution calculée, on voit que la résolution du module $R(3, 1)$ est bigraduée par :

$$\begin{array}{c}
0 \\
\downarrow \\
A[-2, -2] \\
\downarrow \\
A[-1, -2] \oplus A[-1, -2] \oplus A[-2, -1] \oplus A[-2, -1] \\
\downarrow \\
A \oplus A[-1, 0] \oplus A[0, -1] \oplus A[-2, 0] \oplus A[-1, -1] \oplus A[0, -2] \\
\downarrow \\
R(3, 1) \\
\downarrow \\
0
\end{array}$$

où dans la ligne du bas, les décalages sont posés pour que l'image dans $R(3, 1)$ fournisse les générateurs $1, a, b, a^2, ab, b^2$ avec les bons degrés, ensuite, dans

la ligne au-dessus, les décalages sont calculés par rapport aux bidegrés des entrées des matrices M_1 et M_2 , et ainsi de suite en remontant la résolution.

Puisque le groupe S_3 préserve la bigraduation, et puisque la résolution est S_3 -équivariante, on en déduit une résolution bigraduée S_3 -équivariante :

$$\begin{array}{c}
0 \\
\downarrow \\
A[-2, -2] \otimes V_{2,1} \\
\downarrow \\
(A[-1, -2] \otimes V_{1,1}) \oplus (A[-2, -1] \otimes V_{1,2}) \\
\downarrow \\
(A \otimes V_{0,1}) \oplus (A[-1, 0] \otimes V_{0,2}) \oplus (A[0, -1] \otimes V_{0,3}) \\
\oplus (A[-2, 0] \otimes V_{0,4}) \oplus (A[-1, -1] \otimes V_{0,5}) \oplus (A[0, -2] \otimes V_{0,6}) \\
\downarrow \\
R(3, 1) \\
\downarrow \\
0
\end{array}$$

où $V_{2,1}$ est une représentation de S_3 de rang 1, $V_{1,1}$ et $V_{1,2}$ sont de rang 2 et $V_{0,1}, \dots, V_{0,6}$ sont de rang 1. Les calculs précédents ont montré que $V_{2,1}$ est la représentation alternée de S_3 , $V_{1,1}$ et $V_{1,2}$ sont les représentations standards, et les $V_{0,i}$ sont les représentations triviales. On note ρ_0 le caractère de la représentation triviale, ρ_1 celui de la représentation alternée et ρ_2 celui de la représentation standard. Alors, en utilisant les formules sur la manipulation des séries de Frobenius formelles et en remarquant que :

$$\mathcal{F}_{A[u,v]} = t^{-u} q^{-v} \mathcal{F}_A$$

on obtient que :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{R(3,1)} &= (1 + t + q + t^2 + tq + q^2) \mathcal{F}_A \otimes \Phi(\rho_0) \\
&\quad - (tq^2 + t^2q) \mathcal{F}_A \otimes \Phi(\rho_2) \\
&\quad + t^2q^2 \mathcal{F}_A \otimes \Phi(\rho_1) \\
&= \mathcal{F}_A \otimes ((1 + t + q + t^2 + tq + q^2) \rho_0 - (tq^2 + t^2q) \rho_2 + t^2q^2 \rho_1)
\end{aligned}$$

où $(1 + t + q + t^2 + tq + q^2) \rho_0 - (tq^2 + t^2q) \rho_2 + t^2q^2 \rho_1 \in \mathcal{C}(S_n) \otimes \mathbf{Q}(q, t)$ est une représentation dont l'évaluation en $t = q = 1$ fournit : $6\rho_0 - 2\rho_2 + \rho_1$ qui est le résultat précédent.

5.4.4. Cas général. — Dans le cas général, le procédé consiste à décomposer le module $R(n, \ell)$ dans le groupe de Grothendieck de A_n -modules de type fini $S_n \times T^2$ -équivariants comme combinaison linéaire de

modules libres. On note alors $R_n^\ell \in R(S_n)$ la représentation associée en ne conservant que l'action sur une fibre et en oubliant l'action de T^2 . Ceci est achevé en utilisant le résultat suivant :

Théorème 5.4.3 (Haiman). — [Hai02, Théorème 2.1] *Pour tout entier $\ell \geq 0$ on a :*

$$\begin{aligned} H^i(\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2), P_n \otimes B_n^{\otimes \ell}) &= 0 \quad \text{pour } i > 0, \\ H^0(\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2), P_n \otimes B_n^{\otimes \ell}) &= R(n, \ell). \end{aligned}$$

Il en résulte que $\Upsilon(B_n^{\otimes \ell}) = R(n, \ell) \in K_{S_n}(\mathbf{C}^{2n})$ et la démonstration du théorème 5.2.1 donne :

Proposition 5.4.4. — *On a les formules de caractères suivantes :*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{R(n, \ell)} &= (\omega \nabla^* \omega)^\ell(s_{(n)}); \\ R_n^\ell &= \mathcal{E}^\ell(s_{(n)}) \quad (\text{vu dans } \Lambda^n). \end{aligned}$$

On vérifie aisément ces formules sur les premiers exemples calculés à la main.

CHAPITRE 6

CORRESPONDANCES DE MCKAY

6.1. Généralités sur les correspondances de McKay

6.1.1. Action d'un groupe sur un espace vectoriel. — Soit V un espace vectoriel complexe de dimension n et G un groupe fini d'automorphismes de V . Pour tout $g \in G$, on note V^g le sous-espace vectoriel des points fixes de V sous l'action de g :

$$V^g := \{v \in V \mid gv = v\} = \text{Ker}(g - \text{id}).$$

Puisque le groupe G est fini, chaque endomorphisme $g : V \rightarrow V$ est diagonalisable et dans une base appropriée sa matrice est de la forme :

$$\begin{pmatrix} e^{2i\pi r_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{2i\pi r_n} \end{pmatrix},$$

en convenant que $r_i \in [0, 1[$. On définit alors l'âge de g par :

$$\text{age}(g) := \sum_{i=1}^n r_i \in \mathbf{Q}.$$

L'âge est invariant par conjugaison dans G . On vérifie aisément la formule suivante :

$$\text{age}(g) + \text{age}(g^{-1}) = \text{codim}_V(V^g).$$

Si l'espace vectoriel V est muni d'une forme symplectique et si le groupe G agit en respectant cette forme symplectique (*i.e.* $G \subset Sp(V)$) on en déduit que :

$$\text{age}(g) = \frac{1}{2} \text{codim}_V(V^g).$$

Parallèlement à la diagonalisation d'un élément $g \in G$, on peut procéder à sa réduction de Frobenius : si P_1, \dots, P_k sont les invariants de similitude de g , il existe une base de V dans laquelle la matrice de g est de la forme :

$$\begin{pmatrix} C(P_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C(P_k) \end{pmatrix},$$

où $C(P_i)$ désigne la matrice compagnon du polynôme P_i . En notant λ_i sa dimension, on a $n = \sum_{i=1}^k \lambda_i$. Nous notons le produit des dimensions de ces espaces par :

$$\langle g \rangle := \prod_{i=1}^k \lambda_i.$$

En d'autres termes, partant d'un vecteur $v \in V$ non nul, on considère le sous-espace vectoriel engendré par $v, g(v), g^2(v), \dots$ dont la dimension est la dimension du bloc associé dans la décomposition de Frobenius. Alors, le nombre $\langle g \rangle$ peut s'interpréter comme la généralisation à ce contexte du produit des cardinaux des orbites (dans le cas d'une action d'un groupe fini) : la notion de cardinal d'une orbite est remplacée par la notion équivalente de dimension de l'espace vectoriel engendré par une orbite.

La décomposition de Frobenius étant invariante par conjugaison, ces nombres sont invariants par conjugaison dans G . Nous proposons la terminologie suivante :

Définition 6.1.1. — On appelle *degré de complexité* de l'action de g sur V le nombre $\langle g \rangle$.

Par exemple, la complexité de l'identité est $\langle id \rangle = 1$. L'appendice D contient quelques propriétés du degré de complexité pour le groupe symétrique dans le contexte suivant :

Exemple 6.1.2. — Considérons l'action naturelle du groupe symétrique S_n sur \mathbf{C}^n . Les valeurs propres de l'action d'un cycle de longueur j sont les racines j -ièmes de l'unité, donc son âge est $\frac{1}{2}(j-1)$. Plus généralement, si une permutation σ se décompose en cycles disjoints s_1, \dots, s_k de longueurs λ_j avec $\sum_{j=1}^k \lambda_j = n$, alors $\text{age}(\sigma) = \frac{1}{2}(n-k)$. En notant $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ la partition de n associée, on a donc $\text{age}(\sigma) = \frac{1}{2}(|\lambda| - l(\lambda))$. On observe aussi que la

décomposition de Frobenius de $\sigma = s_1 \cdots s_k$ contient k blocs, le bloc associé au cycle s_i étant de longueur λ_i . Ainsi, $\langle \sigma \rangle = \prod_{i=1}^k \lambda_i$.

La définition de la graduation de l'anneau $\mathbf{Q}[S_n]$ présentée au §3.1.4 se généralise. Dans ce cadre plus général, suivant Ginzburg & Kaledin [GK04] nous travaillons sur \mathbf{C} et nous considérons la filtration croissante :

$$F^d \mathbf{C}[G] := \mathbf{C}\{g \in G \mid \text{rg}(id_V - g) \leq d\}.$$

Cette filtration est compatible avec la multiplication de l'algèbre du groupe G . En se restreignant au centre ZG de l'algèbre, on obtient une structure d'algèbre graduée sur $\text{gr}^F ZG$.

6.1.2. Les correspondances de McKay. — Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie et $G \subset SL(V)$ un sous-groupe fini d'automorphismes de V préservant le volume. L'espace quotient V/G admet une structure de variété algébrique affine, en général singulière. D'après le théorème d'Hironaka, il existe des résolutions des singularités $\pi : Y \rightarrow V/G$ où Y est une variété algébrique lisse et π un morphisme birationnel. La *correspondance de McKay* est un principe selon lequel, pour certaines résolutions $Y \rightarrow V/G$ « naturelles », la géométrie de la variété Y peut se lire dans l'action de G sur V . Ce principe recouvre trois aspects que nous présentons en nous inspirant de Reid [Rei97, Rei00] comme suit :

- (i) Lire les fibrés vectoriels sur Y avec les représentations de G :

$$K(Y) \xleftarrow[\text{classique}]{\text{correspondance de McKay}} R(G) ;$$

- (ii) Lire l'anneau de cohomologie de Y avec le centre de l'algèbre sur G :

$$H^*(Y) \xleftarrow[\text{multiplicative}]{\text{correspondance de McKay}} ZG ;$$

- (iii) Lire l'homologie de Y avec les fonctions sur G invariantes par conjugaison :

$$H_*^{BM}(Y) \xleftarrow[\text{duale}]{\text{correspondance de McKay}} \mathcal{C}(G) .$$

La question d'une résolution « naturelle » $\pi : Y \rightarrow V/G$ s'est orientée vers la recherche de résolutions projectives *crépantes*, ce qui signifie ici que le fibré canonique $K_Y := \Lambda^{\dim Y} T^*Y$ est trivial. Cependant, dans les cas où une telle résolution existe, elle n'est pas toujours unique.

Dans notre cadre⁽¹⁾, la *correspondance de McKay classique* s'énonce comme suit :

Théorème 6.1.3 (Bridgeland, King & Reid). — [BKR01] *Soit Y le schéma de Hilbert de G -orbites de Nakamura, $Z \subset Y \times V$ le sous-schéma universel et p, q ses projections respectives sur Y et V . Considérons le diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{q} & V \\ p \downarrow & & \downarrow \sigma \\ Y & \xrightarrow{\pi} & V/G \end{array}$$

où σ est l'application quotient et π le morphisme de Hilbert-Chow. Soit $D(Y)$ la catégorie dérivée des faisceaux algébriques cohérents sur Y et $D_G(V)$ la catégorie dérivée des G -faisceaux algébriques cohérents sur V . Soit le produit fibré :

$$Y \times_X Y = \{(y_1, y_2) \in Y \times Y \mid \pi(y_1) = \pi(y_2)\}.$$

Si $\dim(Y \times_X Y) \leq \dim X + 1$, alors le foncteur de Fourier-Mukai :

$$\Upsilon := \mathbf{R}q_* \circ p^* : D(Y) \rightarrow D_G(V)$$

est une équivalence de catégories et Y est une résolution crépante de V/G . En particulier, les groupes de Grothendieck $K(Y)$ et $K_G(V)$ sont isomorphes.

L'isomorphisme de Thom induit une identification naturelle de $K_G(V)$ avec l'anneau de représentations $R(G)$ du groupe G . La correspondance de McKay est donc réalisée par la variété Y sous la forme d'un isomorphisme :

$$K(Y) \cong R(G).$$

On considère un contexte plus restrictif où l'espace vectoriel V est muni d'une forme symplectique et où le groupe G agit en respectant la forme symplectique. D'après un résultat de Kaledin [Kal02], toute résolution projective crépante Y de V/G est symplectique et l'application $Y \rightarrow V/G$ est semi-petite pour la stratification naturelle du quotient. Si le schéma de Hilbert de G -orbites de Nakamura est lisse, l'hypothèse du théorème de Bridgeland, King & Reid est alors automatiquement vérifiée.

Nous énonçons la *correspondance de McKay duale* ainsi :

⁽¹⁾le théorème de Bridgeland, King & Reid est valable dans une plus grande généralité.

Théorème 6.1.4 (Kaledin). — [Kal02] *Il existe une base de l'espace d'homologie de Borel-Moore de Y indexée par les classes de conjugaison dans G , induisant une bijection naturelle $H_*^{BM}(Y) \cong \mathcal{C}(G)$.*

La correspondance de McKay multiplicative réside dans le théorème suivant :

Théorème 6.1.5 (Ginzburg & Kaledin). — [GK04] *Il existe un isomorphisme naturel d'algèbres graduées $H^*(Y) \cong \text{gr}^F ZG$.*

Reid [Rei97, Rei00] et Ginzburg & Kaledin [GK04, Problème 1.4, Problème 1.5] posent alors les questions de l'interprétation de la dualité de Poincaré et du caractère de Chern sous ces correspondances de McKay :

$$\begin{array}{ccc}
 H_*^{BM}(Y) & \xleftarrow[\text{duale}]{\text{correspondance de McKay}} & \mathcal{C}(G) \\
 \uparrow D & & \uparrow ? \\
 H^*(Y) & \xleftarrow[\text{multiplicative}]{\text{correspondance de McKay}} & ZG \\
 \uparrow ch & & \uparrow ? \\
 K(Y) & \xleftarrow[\text{classique}]{\text{correspondance de McKay}} & R(G)
 \end{array}$$

Remarquons que tout ce qui précède doit être compris avec des coefficients complexes. Cependant, dans notre cadre d'étude il suffit de travailler avec des coefficients rationnels.

6.2. Le cas du schéma de Hilbert de points

Le plan \mathbf{C}^2 étant muni de sa forme symplectique naturelle, l'action du groupe symétrique S_n sur $(\mathbf{C}^2)^n$ respecte la forme symplectique induite. La résolution des singularités du quotient $S^n \mathbf{C}^2$ par le schéma de Hilbert remonte cette forme symplectique (théorème 3.1.3), donc rentre exactement dans le cadre d'étude et fournit une famille d'exemples en toute dimension, pour chaque valeur de l'entier n .

6.2.1. Le « problème de la dualité de Poincaré ». — Avec nos notations usuelles, le « problème de la dualité de Poincaré » signifie le calcul de la

flèche pointillée γ :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^n & \xrightarrow{\phi} & H_*^{BM}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \\ \gamma \downarrow \cdots & & \uparrow D \\ \Lambda^n & \xrightarrow{\Psi} & H^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \end{array}$$

Ainsi que nous l'avons vu précédemment, les classes fondamentales d'homologie des sous-variétés fermées \overline{X}_λ de $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$, notées $\vartheta_{\overline{X}_\lambda}$, forment une base de l'homologie de $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$, ce qui donne un exemple concret du théorème de Kaledin 6.1.4. L'identification naturelle qu'il propose comme correspondance de McKay duale consiste à faire correspondre la classe d'homologie $\vartheta_{\overline{X}_\lambda}$ avec la fonction classe sur S_n valant 1 sur la classe λ et 0 ailleurs. Vue dans l'anneau des fonctions symétriques, cette bijection $\phi^{-1} : H_*^{BM}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \rightarrow \Lambda^n$ est donc caractérisée par :

$$\phi^{-1}\vartheta_{\overline{X}_\lambda} = z_\lambda^{-1}p_\lambda.$$

D'autre part, nous avons vu (lemme 3.1.10) que les classes fondamentales de cohomologie de ces variétés valent :

$$[\overline{X}_\lambda] = \frac{1}{\prod_{i \geq 1} \alpha_i!} q_\lambda, \quad \text{pour } \lambda = (1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \dots),$$

donc dans la correspondance de McKay multiplicative :

$$\Psi^{-1} : H^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \rightarrow \Lambda^n,$$

on a :

$$\Psi^{-1}[\overline{X}_\lambda] = \frac{1}{\prod_{i \geq 1} \alpha_i!} p_\lambda.$$

Puisque par dualité de Poincaré on a $D[\overline{X}_\lambda] = \vartheta_{\overline{X}_\lambda}$, il en résulte que l'application composée :

$$\gamma : \Lambda^n \xrightarrow{\Psi} H^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \xrightarrow{D} H_*^{BM}(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \xrightarrow{\phi^{-1}} \Lambda^n$$

est caractérisée par :

$$p_\lambda \mapsto \left(\frac{1}{\prod_{i \geq 1} \lambda_i} \right) p_\lambda.$$

Pour des raisons qui apparaîtront plus loin, nous proposons d'introduire un signe dans cet isomorphisme de correspondance de McKay duale :

$$\phi^{-1}\vartheta_{\overline{X}_\lambda} = (-1)^{n-l(\lambda)} z_\lambda^{-1} p_\lambda.$$

de telle sorte que la composée soit maintenant définie par :

$$p_\lambda \mapsto (-1)^{n-l(\lambda)} \frac{1}{\prod_{i \geq 1} \lambda_i} p_\lambda.$$

Le signe proposé est naturel puisque $\text{codim } X_\lambda = n - l(\lambda)$.

En résumé, la dualité de Poincaré vue à travers les correspondances de McKay est l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} \gamma : \Lambda^n &\rightarrow \Lambda^n \\ p_\lambda &\mapsto (-1)^{n-l(\lambda)} \frac{1}{\prod_{i \geq 1} \lambda_i} p_\lambda. \end{aligned}$$

6.2.2. Le « problème du caractère de Chern ». — Avec nos notations usuelles (l'application Ψ a été définie au §3.1.3 et l'application Θ au §3.3), le « problème du caractère de Chern » signifie le calcul de la flèche pointillée Γ :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^n & \xrightarrow{\Psi} & H^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \\ \Gamma \uparrow \cdots & & \uparrow ch \\ \Lambda^n & \xrightarrow{\Theta} & K(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \end{array}$$

Cette flèche est caractérisée d'après le théorème 3.3.2 par :

$$\Gamma(s_\lambda) = ch(P_\lambda^*).$$

Nos résultats précédents nous disent que la représentation de $T = \mathbf{C}^*$ d'une fibre $P_\lambda(\xi_\mu)$ est calculée par $\tilde{K}_{\lambda,\mu}(q,t) \Big|_{t=s, q=s^{-1}}$ et le caractère de Chern total est calculé par la proposition 4.4.1. En calculant l'application Γ dans la base des fonctions de Newton nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 6.2.1. — *Pour toute partition μ de n , on a :*

$$\Gamma(p_\mu) = \frac{(-1)^{n-l(\mu)}}{\prod_{i \geq 1} \mu_i} p_\mu + \sum_{\substack{\nu \\ l(\nu) < l(\mu)}} g_{\mu,\nu} p_\nu,$$

pour certains coefficients $g_{\mu,\nu} \in \mathbf{Q}$.

Démonstration. — Nous conservons nos notations usuelles. Si $F = P_\mu$, on sait que $F_\lambda(s) = \tilde{K}_{\mu,\lambda}(q,t) \Big|_{t=s, q=s^{-1}}$ donc :

$$\Gamma(s_\mu) = ch(P_\mu^*) = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)} \text{Coeff} \left(t^0, \omega_t s_\lambda \tilde{K}_{\mu,\lambda}(e^{1/t}, e^{-1/t}) \right).$$

La base de Schur étant orthonormée, on a $\tilde{K}_{\mu,\lambda} = \langle \tilde{H}_\lambda, s_\mu \rangle$ donc :

$$\Gamma(s_\mu) = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)} \text{Coeff} \left(t^0, \omega_t s_\lambda \langle \tilde{H}_\lambda(e^{1/t}, e^{-1/t}), s_\mu \rangle \right).$$

Par linéarité, cette formule reste vraie en toute base et en particulier :

$$\Gamma(p_\mu) = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)} \text{Coeff} \left(t^0, \omega_t s_\lambda \langle \tilde{H}_\lambda(e^{1/t}, e^{-1/t}), p_\mu \rangle \right).$$

D'après la proposition 2.3.2 :

$$\tilde{H}_\lambda(q, q^{-1}) = q^{-n(\lambda)} \prod_{x \in D(\lambda)} (1 - q^{h(x)}) s_\lambda \left[\frac{X}{1-q} \right],$$

donc en insérant dans la formule on trouve :

$$\Gamma(p_\mu) = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)} \text{Coeff} \left(t^0, (\omega_t s_\lambda) q^{-n(\lambda)} \prod_{x \in D(\lambda)} (1 - q^{h(x)}) \left\langle s_\lambda \left[\frac{X}{1-q} \right], p_\mu \right\rangle \right) \Bigg|_{q=e^{1/t}}.$$

En observant que :

$$\begin{aligned} \left\langle s_\lambda \left[\frac{X}{1-q} \right], p_\mu \right\rangle &= \left\langle s_\lambda, p_\mu \left[\frac{X}{1-q} \right] \right\rangle \\ &= \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{1}{(1 - q^{\mu_i})} \chi_\mu^\lambda, \end{aligned}$$

on obtient finalement :

$$\Gamma(p_\mu) = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)} \text{Coeff} \left(t^0, (\omega_t s_\lambda) \chi_\mu^\lambda \left(q^{-n_\lambda} \frac{\prod_{x \in D(\lambda)} (1 - q^{h(x)})}{\prod_{i=1}^{l(\mu)} (1 - q^{\mu_i})} \right) \right) \Bigg|_{q=e^{1/t}}.$$

Puisque l'on a par définition :

$$\omega_t s_\lambda = \sum_{\nu \vdash n} z_\nu^{-1} \chi_\nu^\lambda p_\nu t^{n-l(\nu)},$$

la décomposition de $\Gamma(p_\mu)$ dans la base $\{p_\nu\}$ est (après changement de variable $u = 1/t$) :

$$\Gamma(p_\mu) = \sum_{\nu \vdash n} z_\nu^{-1} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)} \chi_\nu^\lambda \chi_\mu^\lambda \text{Coeff} \left(u^{n-l(\nu)}, \left(q^{-n(\lambda)} \frac{\prod_{x \in D(\lambda)} (1 - q^{h(x)})}{\prod_{i=1}^{l(\mu)} (1 - q^{\mu_i})} \right) \right) \Bigg|_{q=e^u} p_\nu.$$

On observe alors le développement suivant :

Lemme 6.2.2. —

$$\left(q^{-n(\lambda)} \frac{\prod_{x \in D(\lambda)} (1 - q^{h(x)})}{\prod_{i=1}^{l(\mu)} (1 - q^{\mu_i})} \right) \Big|_{q=e^u} = \frac{(-1)^{n-l(\mu)} h(\lambda)}{\prod_{i=1}^{l(\mu)} \mu_i} u^{n-l(\mu)} + \text{puissances supérieures}.$$

Démonstration du lemme. — En effet, on a les développements limités :

$$\begin{aligned} 1 - e^{\mu_i u} &= -\mu_i u (1 + u(\dots)), \\ 1 - e^{h(x)u} &= -h(x)u (1 + u(\dots)), \end{aligned}$$

donc en remontant les quotients on voit que le premier terme du développement est :

$$\frac{\prod_{x \in D(\lambda)} (-h(x)u)}{\prod_{i=1}^{l(\mu)} (-\mu_i u)} = \frac{(-1)^{n-l(\mu)} h(\lambda)}{\prod_{i=1}^{l(\mu)} \mu_i} u^{n-l(\mu)}.$$

□

On en déduit que si $l(\nu) > l(\mu)$, alors le coefficient de $\Gamma(p_\mu)$ devant p_ν est nul. Si $l(\nu) = l(\mu)$, alors le coefficient de $\Gamma(p_\mu)$ devant p_ν est :

$$g_{\mu,\nu} := \frac{(-1)^{n-l(\mu)}}{\prod_{i=1}^{l(\mu)} \mu_i} z_\nu^{-1} \sum_{\lambda \vdash n} \chi_\nu^\lambda \chi_\mu^\lambda.$$

Partant de la formule de Frobenius :

$$p_\mu = \sum_{\lambda \vdash n} \chi_\mu^\lambda s_\lambda,$$

en faisant le produit scalaire par p_ν on trouve l'identité :

$$\delta_{\mu,\nu} z_\nu = \sum_{\lambda \vdash n} \chi_\nu^\lambda \chi_\mu^\lambda,$$

ce qui permet de conclure que $g_{\mu,\nu} = 0$ si $\mu \neq \nu$ et que :

$$g_{\mu,\mu} = \frac{(-1)^{n-l(\mu)}}{\prod_{i=1}^{l(\mu)} \mu_i},$$

ce qui achève la démonstration. □

Nous avons défini au §3.1.4 une graduation sur l'algèbre Λ^n en posant pour toute partition λ de n :

$$\deg p_\lambda = n - l(\lambda).$$

Pour définir le cup-produit, nous nous sommes alors servis de la filtration croissante :

$$F^d \Lambda^n = \mathbf{Q}\{p_\lambda \mid \deg p_\lambda \leq d\},$$

et nous avons noté $\mathrm{gr}^F \Lambda^n$ le gradué associé.

Nous considérons maintenant la filtration décroissante :

$$F_d \Lambda^n = \mathbf{Q}\{p_\lambda \mid \deg p_\lambda \geq d\},$$

et nous notons $\mathrm{gr}_F \Lambda^n$ le gradué associé. Bien sûr, $\mathrm{gr}^F \Lambda^n \cong \mathrm{gr}_F \Lambda^n$ mais cette dernière filtration n'est plus compatible avec le produit de convolution.

Par ailleurs, l'anneau de K-théorie $K(\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ admet une filtration topologique décroissante :

$$F_d K(\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) = \mathbf{Q}\{\mathcal{F} \mid \mathrm{codim} \mathrm{Supp} \mathcal{F} \geq d\},$$

où pour tout faisceau cohérent \mathcal{F} le support est le fermé :

$$\mathrm{Supp} \mathcal{F} = \{x \in \mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2) \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}.$$

Le produit de faisceaux dans $K(\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ est compatible avec cette filtration⁽²⁾. L'anneau gradué $\mathrm{gr} K(\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ est isomorphe à l'anneau gradué de cohomologie $H^*(\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ par le caractère de Chern gradué, donné alors simplement par $\mathrm{gr} \, ch \mathcal{F} = [\mathrm{Supp} \mathcal{F}]$ (voir [CG97, §5.9] en considérant le caractère de Chern de cohomologie au lieu du caractère de Chern homologique qui y est présenté).

Le calcul de l'application Γ mène à la conclusion suivante :

Corollaire 6.2.3. — *Le morphisme Θ (correspondance de McKay) est compatible avec la filtration topologique de la K-théorie et la filtration cohomologique décroissante de l'anneau des fonctions symétriques.*

Démonstration. — Nous avons vu que les classes de cohomologie $[\overline{X_\lambda}]$ forment une base homogène de l'anneau de cohomologie. Nous en déduisons que les faisceaux structuraux $\mathcal{O}_{\overline{X_\lambda}}$ forment une base graduée de $\mathrm{gr} K(\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$ telle que $\deg \mathcal{O}_{\overline{X_\lambda}} = n - l(\lambda)$ puisque :

$$(6.2 \text{ a}) \quad ch \left(\mathcal{O}_{\overline{X_\lambda}} \right) = [\overline{X_\lambda}] + \text{termes en degré supérieur.}$$

Partons de :

$$(\Psi \circ ch \circ \Theta)(p_\lambda) = \Gamma(p_\lambda) = \frac{(-1)^{n-l(\lambda)}}{\prod_{i \geq 1} \lambda_i} p_\lambda + \text{degrés supérieurs.}$$

⁽²⁾L'appendice C contient quelques détails sur ces notions.

D'après le lemme 3.1.10, pour une partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) = (1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \dots)$ on a :

$$\Psi[\overline{X_\lambda}] = \frac{1}{\prod_{i \geq 1} \alpha_i!} p_\lambda$$

donc :

$$(ch \circ \Theta)(p_\lambda) = (-1)^{n-l(\lambda)} \prod_{i \geq 1} \frac{\alpha_i!}{\lambda_i} [\overline{X_\lambda}] + \text{degrés supérieurs}$$

ce qui entraîne (en utilisant (6.2 a)) :

$$\Theta(p_\lambda) = (-1)^{n-l(\lambda)} \prod_{i \geq 1} \frac{\alpha_i!}{\lambda_i} \mathcal{O}_{\overline{X_\lambda}} + \text{degrés supérieurs},$$

d'où le résultat. \square

Puisque l'application Θ est compatible aux filtrations, il est naturel de passer aux gradués associés et l'application Γ devient alors exactement l'application de dualité de Poincaré. En effet, après graduation, on a le diagramme :

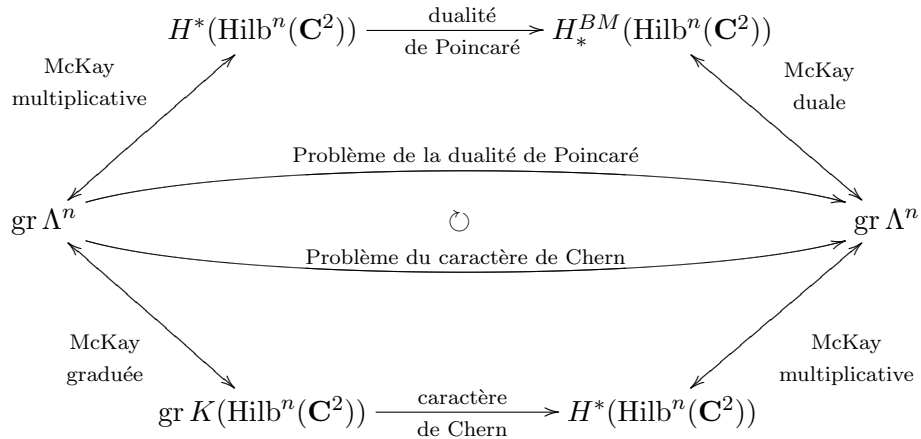
$$\begin{array}{ccc} \text{gr}^F \Lambda^n & \xrightarrow{\Psi} & H^*(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \\ \text{gr } \Gamma \uparrow & & \uparrow \text{gr } ch \\ \text{gr}_F \Lambda^n & \xrightarrow{\text{gr } \Theta} & \text{gr } K(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) \end{array}$$

et :

$$(\text{gr } \Gamma)(p_\lambda) = (-1)^{n-l(\lambda)} \frac{1}{\prod_{i \geq 1} \lambda_i} p_\lambda,$$

ce qui est exactement le morphisme obtenu pour la dualité de Poincaré.

Nous pouvons aussi schématiser la situation ainsi :



6.3. Commentaire

Nous avons obtenu que les deux questions du calcul de la dualité de Poincaré et du caractère de Chern au travers des correspondances de McKay (après graduation naturelle pour ce dernier) se résolvent en les applications :

$$p_\lambda \mapsto (-1)^{n-l(\lambda)} \frac{1}{\prod_{i \geq 1} \lambda_i} p_\lambda.$$

Dans notre cadre d'étude, le groupe symétrique S_n agit par permutation sur \mathbf{C}^n et nous considérons l'action induite sur $(\mathbf{C}^2)^n \cong \mathbf{C}^n \otimes \mathbf{C}^2$ muni de la structure symplectique naturelle, qui via cet isomorphisme naturel est simplement le produit tensoriel du produit scalaire canonique sur \mathbf{C}^n et de la forme volume canonique sur \mathbf{C}^2 . Pour définir les âges, nous considérons l'action de S_n sur $(\mathbf{C}^2)^n$ et nous voyons que $\text{age}(\lambda) = n - l(\lambda)$ (car c'est le double de la valeur calculée dans l'exemple 6.1.2). Par contre, pour calculer les degrés de complexité, nous considérons l'action de S_n sur \mathbf{C}^n (car dans la décomposition $(\mathbf{C}^2)^n \cong \mathbf{C}^n \otimes \mathbf{C}^2$, le groupe S_n n'agit que sur le premier facteur) et nous obtenons $\langle \lambda \rangle = \prod_{i \geq 1} \lambda_i$. Ainsi, l'application s'interprète comme :

$$p_\lambda \mapsto (-1)^{\text{age}(\lambda)} \frac{1}{\langle \lambda \rangle} p_\lambda.$$

On peut relire cette application dans $\mathcal{C}(S_n)$. En désignant toujours par χ_λ la fonction classe valant 1 sur la classe λ et 0 ailleurs, l'application est déterminée par :

$$\chi_\lambda \mapsto (-1)^{\text{age}(\lambda)} \frac{1}{\langle \lambda \rangle} \chi_\lambda.$$

Question 6.3.1. — Dans le cadre symplectique général exposé initialement, nous sommes conduits à considérer l'application suivante de $\mathcal{C}(G)$ dans $\mathcal{C}(G)$ (ici avec des coefficients complexes) :

$$\chi_{[g]} \mapsto (-1)^{\text{age}(g)} \frac{1}{\langle g \rangle} \chi_{[g]},$$

où $\chi_{[g]}$ désigne la fonction classe valant 1 sur la classe de conjugaison $[g]$ de g et 0 ailleurs. Se pourrait-il que ce soit encore l'application de dualité de Poincaré vue au travers des correspondances de McKay ? Se pourrait-il que l'isomorphisme de correspondance de McKay en K-théorie soit encore compatible avec les filtrations et qu'après graduation l'isomorphisme de caractère de Chern soit aussi cette application ?

CHAPITRE 7

FIBRÉ TANGENT DU SCHÉMA DE HILBERT DE POINTS

Dans ce chapitre, nous démontrons des formules de séries génératrices pour la classe de Chern totale et de caractère de Chern du fibré tangent au schéma de Hilbert de point sur le plan affine. La méthode consiste à établir l'existence de formules universelles d'un certain type pour le schéma de Hilbert de points sur une surface projective quelconque, puis à déduire les formules pour le plan affine.

7.1. Cohomologie des schémas de Hilbert de points

Nous introduisons maintenant dans leur généralité les schémas de Hilbert de points et divers opérateurs exploitant la structure d'algèbre vertex de leur espace total de cohomologie. Nous reprenons les présentations de Lehn [Leh99] et Li, Qin & Wang [LQW02, LQW01, LQW03b]. Nous conservons des notations compatibles avec les chapitres précédents : en particulier, nous n'utilisons pas les notations usuelles de la théorie des algèbres vertex ni leurs conventions de signe pour les opérateurs de Heisenberg et de Virasoro (nous suivons en cela Lehn [Leh99]).

7.1.1. Généralités. — Soit S une surface projective complexe lisse de classe canonique K_S et de classe d'Euler e_S . On note $S^{[n]} := \text{Hilb}^n(S)$ le schéma de Hilbert de points sur S , paramétrant les sous-schémas fermés de dimension 0 et de longueur n dans S . La variété $S^{[n]}$ est projective, lisse de dimension

complexe $2n$. Notons les espaces de cohomologie singulière à coefficients rationnels :

$$\mathbb{H}_n^S := \bigoplus_{i=0}^{4n} H^i(S^{[n]}),$$

$$\mathbb{H}^S := \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{H}_n^S.$$

L'unité de $\mathbb{H}_0^S \cong \mathbf{Q}$ est appelée *vecteur vide* et est notée $|0\rangle$ (ou $|0\rangle_S$ si besoin). L'espace \mathbb{H}^S est bigradué en (n, i) : l'entier n est le *poinds conforme*, l'entier i le *degré cohomologique* que nous noterons aussi $|\cdot|$.

Un opérateur linéaire $\mathfrak{f} \in \text{End}(\mathbb{H}^S)$ est dit *homogène* de bidegré (u, v) si $\mathfrak{f}(H^i(S^{[n]})) \subset H^{i+v}(S^{[n+u]})$. Le *super-commutateur* de deux opérateurs homogènes $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in \text{End}(\mathbb{H}^S)$ est défini par :

$$[\mathfrak{f}, \mathfrak{g}] := \mathfrak{f} \circ \mathfrak{g} - (-1)^{|\mathfrak{f}| \cdot |\mathfrak{g}|} \mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}.$$

La forme d'intersection $\langle \alpha, \beta \rangle_n := \int_{S^{[n]}} \alpha \cdot \beta$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{H}_n^S$ s'étend naturellement en une forme bilinéaire anti-symétrique non-dégénérée sur \mathbb{H}^S notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pour tout opérateur linéaire homogène $\mathfrak{f} \in \text{End}(\mathbb{H}^S)$, on note \mathfrak{f}^\dagger l'opérateur *adjoint* défini par :

$$\langle \mathfrak{f}(\alpha), \beta \rangle = (-1)^{|\mathfrak{f}| \cdot |\alpha|} \langle \alpha, \mathfrak{f}^\dagger(\beta) \rangle.$$

7.1.2. Opérateurs de Heisenberg. — Pour tous $n \geq 0$ et $k > 0$, soit $S^{[n, n+k]} \subset S^{[n]} \times S \times S^{[n+k]}$ la sous-variété fermée définie ensemblistement par :

$$S^{[n, n+k]} := \{(\xi, x, \xi') \mid \xi \subset \xi' \text{ et } \text{Supp}(\mathcal{I}_\xi / \mathcal{I}_{\xi'}) = \{x\}\},$$

où \mathcal{I}_ξ désigne le faisceau d'idéaux du sous-schéma ξ (on convient que $S^{[n, n]} = \emptyset$). Les projections sur les divers facteurs sont notées ainsi :

$$\begin{array}{ccccc} & S^{[n]} \times S \times S^{[n+k]} & & & \\ & \swarrow \varphi \quad \downarrow \rho \quad \searrow \psi & & & \\ S^{[n]} & & S & & S^{[n+k]} \end{array}$$

Définition 7.1.1 (Nakajima). — [Nak96a] Définissons des opérateurs linéaires :

$$\mathfrak{q}_k : H^*(S) \longrightarrow \text{End}(\mathbb{H}^S), \quad k \in \mathbf{Z},$$

comme suit : si $k \geq 0$, pour $\alpha \in H^*(S)$ et $x \in H^*(S^{[n]})$ on pose :

$$\mathfrak{q}_k(\alpha)(x) := \psi_* \left(\left[S^{[n, n+k]} \right] \cdot \varphi^*(x) \cdot \rho^*(\alpha) \right).$$

Les opérateurs d'indice négatif sont définis par adjonction :

$$\mathfrak{q}_{-k}(\alpha) := (-1)^k \mathfrak{q}_k(\alpha)^\dagger, \quad \forall k > 0.$$

Par construction, $\mathfrak{q}_k(\alpha)$ est un opérateur homogène de bidegré $(k, 2k - 2 + |\alpha|)$ et $\mathfrak{q}_0 = 0$. Les opérateurs \mathfrak{q}_k sont appelés *opérateurs de création* si $k \geq 1$ et *opérateurs d'annihilation* si $k \leq -1$.

Théorème 7.1.2 (Nakajima). — [Nak96a, Nak96b] *Les opérateurs \mathfrak{q} vérifient la relation de commutation suivante :*

$$[\mathfrak{q}_i(\alpha), \mathfrak{q}_j(\beta)] = i \cdot \delta_{i+j,0} \cdot \int_S \alpha \beta \cdot \text{id}_{\mathbb{H}^S}.$$

Il résulte de ce théorème que l'espace total de cohomologie \mathbb{H}^S admet une base de vecteurs de la forme :

$$\mathfrak{q}_{n_1}(u_1^S) \cdots \mathfrak{q}_{n_k}(u_k^S) |0\rangle,$$

avec $n_i \geq 1$ et où les classes u_i^S parcourent une base vectorielle de $H^*(S)$ (voir [EG99, Théorème 5.6]).

7.1.3. Opérateurs de Virasoro. — Pour tout $k \geq 1$, nous notons $\tau_{k!} : H^*(S) \longrightarrow H^*(S^k)$ l'application induite par l'inclusion diagonale $\tau_k : S \rightarrow S^k$. Par décomposition de Künneth, on note :

$$\tau_{k!}\alpha = \sum_j \alpha_{j,1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{j,k} \in H^*(S) \otimes \cdots \otimes H^*(S)$$

et on pose :

$$\mathfrak{q}_{i_1} \cdots \mathfrak{q}_{i_k}(\tau_{k!}\alpha) := \sum_j \mathfrak{q}_{i_1}(\alpha_{j,1}) \circ \cdots \circ \mathfrak{q}_{i_k}(\alpha_{j,k}).$$

Le *produit bien ordonné* de deux opérateurs \mathfrak{q} est défini par la convention :

$$: \mathfrak{q}_n \mathfrak{q}_m : := \begin{cases} \mathfrak{q}_n \mathfrak{q}_m & \text{si } n \geq m \\ \mathfrak{q}_m \mathfrak{q}_n & \text{si } n \leq m \end{cases}$$

Définition 7.1.3 (Lehn). — [Leh99] Définissons des opérateurs linéaires $\mathfrak{L}_n : H^*(S) \longrightarrow \text{End}(\mathbb{H}^S)$ pour $n \in \mathbb{Z}$ par :

$$\mathfrak{L}_n := \frac{1}{2} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} : \mathfrak{q}_\nu \mathfrak{q}_{n-\nu} : \tau_{2!}$$

Par construction, $\mathfrak{L}_n(\alpha)$ est un opérateur homogène de bidegré $(n, 2n + |\alpha|)$.

Théorème 7.1.4 (Lehn). — [Leh99] Les opérateurs \mathfrak{L} vérifient les relations de commutation suivantes :

$$\begin{aligned} [\mathfrak{L}_n(\alpha), \mathfrak{q}_m(\beta)] &= -m \cdot \mathfrak{q}_{n+m}(\alpha\beta); \\ [\mathfrak{L}_n(\alpha), \mathfrak{L}_m(\beta)] &= (n-m) \cdot \mathfrak{L}_{n+m}(\alpha\beta) - \frac{n^3-n}{12} \delta_{n+m,0} \cdot \int_S e_S \alpha \beta \cdot \text{id}_{\mathbb{H}^S}. \end{aligned}$$

7.1.4. Dérivations. — En conservant dans ce cadre général les notations que nous avons utilisées dans les chapitres précédents, nous notons $\Xi_n^S \subset S^{[n]} \times S$ la famille universelle et $B_n^S := p_* \mathcal{O}_{\Xi_n^S}$ le fibré tautologique sur $S^{[n]}$.

Définition 7.1.5 (Lehn). — [Leh99] Soit $\mathfrak{d} \in \text{End}(\mathbb{H}^S)$ l'opérateur linéaire défini par :

$$\mathfrak{d}(x) := c_1(B_n^S) \cdot x \quad \forall x \in H^*(S^{[n]}).$$

La *dérivée* d'un endomorphisme $\mathfrak{f} \in \text{End}(\mathbb{H}^S)$ est $\mathfrak{f}' := [\mathfrak{d}, \mathfrak{f}]$. Les dérivées supérieures sont notées $\mathfrak{f}^{(n)} := (\text{ad } \mathfrak{d})^n(\mathfrak{f})$.

L'opérateur \mathfrak{d} est homogène de bidegré $(0, 2)$.

Théorème 7.1.6 (Lehn). — [Leh99] Les dérivées des opérateurs \mathfrak{q} vérifient les formules :

$$\begin{aligned} [\mathfrak{q}'_n(\alpha), \mathfrak{q}_m(\beta)] &= -nm \cdot \left(\mathfrak{q}_{n+m}(\alpha\beta) + \frac{|n|-1}{2} \delta_{n+m,0} \cdot \int_S K_S \alpha \beta \cdot \text{id}_{\mathbb{H}^S} \right); \\ \mathfrak{q}'_n(\alpha) &= n \cdot \mathfrak{L}_n(\alpha) + \mathfrak{q}_n(K_S \alpha). \end{aligned}$$

7.1.5. Fibrés tautologiques. — Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Xi_n^S & \hookrightarrow & S^{[n]} \times S \xrightarrow{q} S \\ & & \downarrow p \\ & & S^{[n]} \end{array}$$

Soit F un faisceau localement libre sur S . Pour tout $n \geq 0$, le *fibré tautologique* associé sur $S^{[n]}$ est défini par :

$$F^{[n]} := p_* \left(\mathcal{O}_{\Xi_n^S} \otimes q^* F \right).$$

Puisque la projection p est un morphisme plat fini de degré n , $F^{[n]}$ est un fibré de rang $n \cdot \text{rg}(F)$ et on convient que $F^{[0]} = 0$. Par exemple, $B_n^S = \mathcal{O}_S^{[n]}$.

La construction s'étend naturellement en un morphisme de groupes :

$$-^{[n]} : K(S) \rightarrow K(S^{[n]}).$$

Définition 7.1.7 (Lehn). — [Leh99] Pour $u \in K(S)$, soit les opérateurs linéaires $\mathfrak{c}(u)$ et $\mathfrak{ch}(u)$ dans $\text{End}(\mathbb{H}^S)$ agissant pour tout $n \geq 0$ sur $H^*(S^{[n]})$ respectivement par multiplication par la classe totale de Chern $c_{tot}(u^{[n]})$ et par le caractère de Chern $ch(u^{[n]})$.

Théorème 7.1.8 (Lehn). — [Leh99] Soit $u \in K(S)$ de rang r et $\alpha \in H^*(S)$. Alors :

$$\begin{aligned} [\mathfrak{ch}(u), \mathfrak{q}_1(\alpha)] &= \exp(\text{ad } \mathfrak{d})(\mathfrak{q}_1(ch(u)\alpha)); \\ \mathfrak{c}(u) \circ \mathfrak{q}_1(\alpha) \circ \mathfrak{c}(u)^{-1} &= \sum_{\nu, k \geq 0} \binom{r-k}{\nu} \mathfrak{q}_1^{(\nu)}(c_k(u)\alpha). \end{aligned}$$

7.1.6. Classes tautologiques. — Par analogie avec la construction des fibrés tautologiques, on construit un opérateur $-^{[n]} : H^*(S) \rightarrow H^*(S^{[n]})$ ainsi :

Définition 7.1.9 (Li, Qin & Wang). — [LQW02] Pour toute classe de cohomologie $\gamma \in H^*(S)$, on pose :

$$\gamma^{[n]} := p_* \left(ch \left(\mathcal{O}_{\Xi_n^S} \right) \cdot q^* td(S) \cdot q^* \gamma \right).$$

On définit un opérateur linéaire $\mathfrak{G}(\gamma) \in \text{End}(\mathbb{H}^S)$ agissant sur $H^*(S^{[n]})$ par multiplication par $\gamma^{[n]}$.

Cette définition est telle que, d'après le théorème de Riemann-Roch-Grothendieck, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^*(S) & \xrightarrow{-^{[n]}} & H^*(S^{[n]}) \\ \uparrow ch & & \uparrow ch \\ K(S) & \xrightarrow{-^{[n]}} & K(S^{[n]}) \end{array}$$

Théorème 7.1.10 (Li, Qin & Wang). — [LQW02] Soit $\gamma, \alpha \in H^*(S)$. Alors :

$$[\mathfrak{G}(\gamma), \mathfrak{q}_1(\alpha)] = \exp(\text{ad } \mathfrak{d})(\mathfrak{q}_1(\gamma\alpha)).$$

7.2. Formules universelles

Remarque 7.2.1. — Le contenu de cette section développe des idées de Manfred Lehn ([Leh]). Toute erreur éventuelle serait uniquement de mon fait !

7.2.1. Définition d’une formule universelle. — Nous exprimons l’idée de *formule universelle* en nous inspirant de la notion de *combinaison linéaire universelle* définie par Li, Qin & Wang [LQW03b, Définition 3.1].

Pour toute variété projective X , le mot U^X désigne une classe de cohomologie dans $H^*(X)$ fonctorielle en X : si $Y \xrightarrow{f} X$ est une application régulière, alors $U^Y = f^*U^X$. Pour toute surface projective lisse S , on pose $\mathcal{U}_n^S := U^{S^{[n]}}$ et :

$$\mathcal{U}^S := \sum_{n \geq 0} \mathcal{U}_n^S \in \mathbb{H}^S.$$

Définition 7.2.2. — Une classe $\mathcal{U}_n^S \in H^*(S^{[n]})$ admet une *formule universelle* s’il existe un polynôme $P \in \mathbf{Q}[Z_1, \dots, Z_p]$ indépendant de la surface S , des entiers $k_1, \dots, k_p \geq 1$, des indices $n_{i,j} \geq 1$ pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq k_i$ ainsi que des classes de cohomologie $u_i^S \in H^*(S)$ appartenant au sous-anneau engendré par $1_S, K_S, e_S$ (et dépendant éventuellement des données construisant \mathcal{U}_n^S) avec lesquels on puisse écrire :

$$\mathcal{U}_n^S = P \left((\mathfrak{q}_{n_{1,1}} \cdots \mathfrak{q}_{n_{1,k_1}})(\tau_{k_1!} u_1^S), \dots, (\mathfrak{q}_{n_{p,1}} \cdots \mathfrak{q}_{n_{p,k_p}})(\tau_{k_p!} u_p^S) \right) |0\rangle.$$

Si le polynôme est homogène de degré 1, on dira que la formule est une *combinaison linéaire universelle*.

Remarque 7.2.3. — Les classes \mathcal{U}_n^S que nous avons en vue sont les classes caractéristiques de fibrés vectoriels naturels sur le schéma de Hilbert $S^{[n]}$.

7.2.2. Opérations sur des opérateurs vertex. — Nous présentons ici quelques méthodes de calcul sur les opérateurs vertex que nous allons utiliser. Bien que le langage et les notations s’inspirent de Ben-Zvi & Frenkel [BZF01] et Kac [Kac97], les conventions de signe dans les opérateurs diffèrent des conventions usuelles.

Soit V un espace vectoriel de dimension quelconque sur \mathbf{Q} . L’algèbre $\text{End}(V)$ des endomorphismes sur V est associative unitaire mais non commutative. On considère l’algèbre des séries formelles $\text{End}(V)[[t]]$. Pour un élément $f \in \text{End}(V)[[t]]$ (que nous appellerons un *opérateur vertex*) noté :

$$f = \sum_{k \geq 0} f_k t^k, \quad f_k \in \text{End}(V),$$

on appelle *valuation* de f l'entier :

$$\nu(f) := \min\{k \geq 0 \mid f_k \neq 0\},$$

en convenant que $\nu(f) = +\infty$ si $f = 0$. Si $\nu(f) \geq 1$ on peut définir l'*exponentielle* et le *logarithme* suivants :

$$\begin{aligned} \exp(f) &:= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f^n, \\ \log(\text{id}_V + f) &:= \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} f^n, \end{aligned}$$

et on a les relations habituelles pour deux opérateurs vertex f, g de valuation strictement positive et tels que $f \circ g = g \circ f$:

$$\begin{aligned} \exp(f + g) &= \exp(f) \circ \exp(g); \\ \exp(\log(\text{id}_V + f)) &= \text{id}_V + f; \\ \log(\exp(f)) &= f; \\ \log((\text{id}_V + f) \circ (\text{id}_V + g)) &= \log(\text{id}_V + f) + \log(\text{id}_V + g). \end{aligned}$$

Si $V = V_1 \otimes V_2$, on a une application naturelle :

$$\begin{array}{ccc} \text{End}(V_1) \oplus \text{End}(V_2) & \hookrightarrow & \text{End}(V_1) \otimes \text{End}(V_2) \subset \text{End}(V) \\ f_1 \oplus f_2 & \mapsto & f_1 \otimes \text{id}_{V_2} + \text{id}_{V_1} \otimes f_2 \end{array}$$

qui s'étend aux opérateurs vertex en un morphisme d'algèbres graduées, en supposant que id_{V_i} est en degré t^0 :

$$\text{End}(V_1)[[t]] \oplus \text{End}(V_2)[[t]] \hookrightarrow \text{End}(V_1)[[t]] \otimes \text{End}(V_2)[[t]] \subset \text{End}(V)[[t]]$$

On vérifie alors aisément que si $f_1 \in \text{End}(V_1)[[t]]$ et $f_2 \in \text{End}(V_2)[[t]]$ sont deux opérateurs vertex de valuation strictement positive, ils commutent en tant qu'opérateurs vertex sur V et on a :

$$\begin{aligned} \exp(f_1 \oplus f_2) &= \exp(f_1) \otimes \exp(f_2); \\ \log((\text{id}_{V_1} + f_1) \otimes (\text{id}_{V_2} + f_2)) &= \log(\text{id}_{V_1} + f_1) \oplus \log(\text{id}_{V_2} + f_2). \end{aligned}$$

7.2.3. Principe d'utilisation. — Soit S_1, S_2 deux surfaces projectives lisses et $S_1 \amalg S_2$ leur réunion disjointe. Le schéma de Hilbert de points se décompose sous la forme :

$$(S_1 \amalg S_2)^{[n]} = \coprod_{n_1+n_2=n} S_1^{[n_1]} \times S_2^{[n_2]}$$

(voir [EGL01, Formule (0.1)]). Il en résulte que :

$$H^* \left((S_1 \amalg S_2)^{[n]} \right) \cong \bigoplus_{n_1+n_2=n} H^* \left(S_1^{[n_1]} \right) \otimes H^* \left(S_2^{[n_2]} \right),$$

et donc :

$$\mathbb{H}^{S_1 \amalg S_2} \cong \mathbb{H}^{S_1} \otimes \mathbb{H}^{S_2}.$$

En particulier, puisque ces espaces gradués sont tels que $\mathbb{H}_0^{S_i} \cong \mathbf{Q}$, on a une inclusion bigraduée :

$$\mathbb{H}^{S_1} \oplus \mathbb{H}^{S_2} \subset \mathbb{H}^{S_1 \amalg S_2}.$$

Nous allons utiliser les opérations sur les opérateurs vertex expliquées précédemment avec $V = \mathbb{H}^S$, $V_1 = \mathbb{H}^{S_1}$ et $V_2 = \mathbb{H}^{S_2}$. L'indéterminée t sera le plus souvent omise car elle est implicite : un opérateur $\mathfrak{q}_m(\cdot)$ signifie, si l'on veut préciser, $\mathfrak{q}_m(\cdot)t^m$: on garde trace du poids conforme de l'opérateur.

Lemme 7.2.4. — *Soit $\mathcal{U}^S \in \mathbb{H}^S$ une classe admettant une formule universelle et telle que :*

$$\mathcal{U}^{S_1} \oplus \mathcal{U}^{S_2} = \mathcal{U}^{S_1 \amalg S_2}$$

pour toutes surfaces projectives lisses S_1, S_2 . Alors la formule universelle pour \mathcal{U}^S est une combinaison linéaire universelle (infinie).

Démonstration. — Par hypothèse, on a pour tout $n \geq 0$ l'équation $\mathcal{U}_n^{S_1} \oplus \mathcal{U}_n^{S_2} = \mathcal{U}_n^{S_1 \amalg S_2}$. Soit $\mathfrak{q}_{n_1} \cdots \mathfrak{q}_{n_p}(\tau_{p!} u^S)$ et $\mathfrak{q}_{m_1} \cdots \mathfrak{q}_{m_q}(\tau_{q!} v^S)$ deux opérateurs apparaissant dans le polynôme universel de la classe \mathcal{U}_n^S . Puisque $u^{S_1 \amalg S_2} = u^{S_1} + u^{S_2}$ et $v^{S_1 \amalg S_2} = v^{S_1} + v^{S_2}$ pour les classes pouvant intervenir dans une expression universelle (si ces classes font intervenir des données supplémentaires, ainsi qu'il est autorisé dans la définition, nous supposons qu'elles se décomposent aussi, ce qui sera le cas dans nos utilisations), si le polynôme universel contient un produit du type $\mathfrak{q}_{n_1} \cdots \mathfrak{q}_{n_p}(\tau_{p!} u^S) \circ \mathfrak{q}_{m_1} \cdots \mathfrak{q}_{m_q}(\tau_{q!} v^S)$, en décomposant les opérateurs comme :

$$\mathfrak{q}_{n_1} \cdots \mathfrak{q}_{n_p}(\tau_{p!} u^{S_1 \amalg S_2}) = \mathfrak{q}_{n_1} \cdots \mathfrak{q}_{n_p}(\tau_{p!} u^{S_1}) + \mathfrak{q}_{n_1} \cdots \mathfrak{q}_{n_p}(\tau_{p!} u^{S_2}),$$

des termes en trop apparaissent. Donc il ne peut pas y avoir de produits dans le polynôme universel, qui est donc homogène de degré 1 et la formule universelle est une combinaison linéaire. \square

Lemme 7.2.5. — *Soit $\mathcal{U}^S \in \mathbb{H}^S$ une classe admettant une formule universelle vérifiant $\mathcal{U}_0^S = |0\rangle$ et telle que :*

$$\mathcal{U}^{S_1} \otimes \mathcal{U}^{S_2} = \mathcal{U}^{S_1 \amalg S_2}$$

pour toutes surfaces projectives lisses S_1, S_2 . Alors la formule universelle pour \mathcal{U}^S est une exponentielle d'une combinaison linéaire universelle (infinie).

Démonstration. — Notons $\mathfrak{U}^S \in \text{End}(\mathbb{H}^S)$ l'opérateur défini par la formule universelle de \mathcal{U}^S (cet opérateur est très différent de l'opérateur agissant par multiplication par \mathcal{U}^S). Par construction, $\mathcal{U}^S = \mathfrak{U}^S |0\rangle_S$ et l'équation signifie :

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}^{S_1 \amalg S_2} |0\rangle_{S_1 \amalg S_2} &= (\mathfrak{U}^{S_1} |0\rangle_{S_1}) \otimes (\mathfrak{U}^{S_2} |0\rangle_{S_2}) \\ &= (\mathfrak{U}^{S_1} \otimes \mathfrak{U}^{S_2}) (|0\rangle_{S_1} \otimes |0\rangle_{S_2}), \end{aligned}$$

avec $|0\rangle_{S_1 \amalg S_2} = |0\rangle_{S_1} \otimes |0\rangle_{S_2}$. Puisque l'opérateur \mathfrak{U}^S ne contient que des opérateurs \mathfrak{q}_i avec $i \geq 1$, cette équation implique l'égalité des opérateurs :

$$\mathfrak{U}^{S_1 \amalg S_2} = \mathfrak{U}^{S_1} \otimes \mathfrak{U}^{S_2}.$$

Puisque $\mathcal{U}_0^S = |0\rangle$, on a $\mathfrak{U}^S = \text{id}_{\mathbb{H}^S} + \dots$ donc l'opérateur \mathfrak{U}^S admet un logarithme. L'équation précédente entraîne :

$$\log \mathfrak{U}^{S_1 \amalg S_2} = \log \mathfrak{U}^{S_1} \oplus \log \mathfrak{U}^{S_2}.$$

L'opérateur $\log \mathfrak{U}^S$ ne contient que des opérateurs de création, donc on peut appliquer le lemme 7.2.4 aux classes $\log \mathfrak{U}^S |0\rangle_S$, ce qui achève la démonstration puisque $\mathfrak{U}^S = \exp(\log \mathfrak{U}^S)$. \square

7.2.4. Résultats généraux sur l'universalité. — Nous rappelons quelques résultats d'universalité démontrés par Li, Qin & Wang dont nous aurons besoin pour étudier les classes caractéristiques des fibrés tautologiques et du fibré tangent. Le type de formules que nous allons énoncer diffère de notre notion de formule universelle puisqu'ici les indices seront des entiers relatifs.

Lemme 7.2.6 (Li, Qin & Wang). — [LQW03b, Lemme 3.2] *Tout commutateur $[\mathfrak{q}_{n_1} \cdots \mathfrak{q}_{n_p}(\tau_p! \alpha), \mathfrak{q}_{m_1} \cdots \mathfrak{q}_{m_q}(\tau_q! \beta)]$ est une combinaison linéaire universelle d'opérateurs $\mathfrak{q}_{i_1} \cdots \mathfrak{q}_{i_k}(\tau_k! (\alpha\beta))$ (tous les indices d'opérateurs sont ici des entiers relatifs).*

Lemme 7.2.7 (Li, Qin & Wang). — [LQW03b, Lemme 3.3(i)] *Tout opérateur dérivé $\mathfrak{q}_n^{(\nu)}(\alpha)$ est une combinaison linéaire universelle d'opérateurs $\mathfrak{q}_{n_1} \cdots \mathfrak{q}_{n_k}(\tau_k!(K_S^r \alpha))$ pour $0 \leq r \leq 2$ et $n_i \in \mathbf{Z}$.*

Lemme 7.2.8 (Li, Qin & Wang). — [LQW03b, Lemme 3.4] *Pour tout $\alpha \in H^*(S)$, $n_j \in \mathbf{Z}$, $k \geq 2$ et $1 \leq j < k$ on a :*

$$\begin{aligned} & \mathfrak{q}_{n_1} \cdots \mathfrak{q}_{n_j} \mathfrak{q}_{n_{j+1}} \cdots \mathfrak{q}_{n_k}(\tau_k! \alpha) - \mathfrak{q}_{n_1} \cdots \mathfrak{q}_{n_{j+1}} \mathfrak{q}_{n_j} \cdots \mathfrak{q}_{n_k}(\tau_k! \alpha) \\ &= n_j \delta_{2n_j+1,0} \mathfrak{q}_{n_1} \cdots \mathfrak{q}_{n_{j-1}} \mathfrak{q}_{n_{j+2}} \cdots \mathfrak{q}_{n_k}(\tau_{(k-2)}!(e_S \alpha)) \end{aligned}$$

Lemme 7.2.9 (Li, Qin & Wang). — [LQW03b, Lemme 4.2] *Tout commutateur $[\mathfrak{G}(\alpha), \mathfrak{q}_{n_1} \cdots \mathfrak{q}_{n_k}(\tau_k! \beta)]$ est une combinaison linéaire universelle d'opérateurs $\mathfrak{q}_{m_1} \cdots \mathfrak{q}_{m_p}(\tau_p!(K_S^r \alpha \beta))$ (tous les indices sont des entiers relatifs et $0 \leq r \leq 2$).*

Lemme 7.2.10 (Li, Qin & Wang). — [LQW03b, Théorème 5.1] *Le produit cup de deux classes $\mathfrak{q}_{n_1} \cdots \mathfrak{q}_{n_p}(\tau_p! \alpha) |0\rangle$ et $\mathfrak{q}_{m_1} \cdots \mathfrak{q}_{m_q}(\tau_q! \beta) |0\rangle$ est une combinaison linéaire universelle de classes $\mathfrak{q}_{i_1} \cdots \mathfrak{q}_{i_k}(\tau_k! \gamma) |0\rangle$ où γ dépend de α, β, K_S, e_S (ici tous les indices sont positifs).*

7.2.5. Formules universelles pour les fibrés tautologiques. —

7.2.5.1. Caractère de Chern des fibrés tautologiques. — Nous montrons ici qu'il existe une formule universelle pour $\mathcal{U}_n^S := ch(u^{[n]})$ où $u \in K(S)$.

Lemme 7.2.11. — *Soit $u \in K(S)$. Le caractère de Chern $ch(u^{[n]})$ admet une formule universelle de la forme :*

$$\sum_{n \geq 0} ch(u^{[n]}) = \exp(\mathfrak{q}_1(1_S)) \mathfrak{F}(u) |0\rangle$$

où $\mathfrak{F}(u) |0\rangle$ est une combinaison linéaire universelle faisant intervenir $ch(u)$.

Démonstration. — Dans une première approche, nous montrons l'existence d'une formule universelle par récurrence sur n , le résultat étant clair pour $n = 0$. Nous reprenons ensuite la méthode plus finement pour préciser le type de la formule universelle obtenue. Partons de la formule de commutation du théorème 7.1.8 :

$$[ch(u), \mathfrak{q}_1(1_S)] = \sum_{\nu \geq 0} \frac{1}{\nu!} \mathfrak{q}_1^{(\nu)}(ch(u)),$$

que nous évaluons en $1_{S^{[n-1]}}$ pour $n \geq 1$. Puisque $1_{S^{[n]}} = \frac{1}{n!} \mathfrak{q}_1(1_S)^n |0\rangle$, on a :

$$n \cdot ch(u^{[n]}) = \mathfrak{q}_1(1_S) ch(u^{[n-1]}) + \sum_{\nu \geq 0} \frac{1}{\nu!(n-1)!} \mathfrak{q}_1^{(\nu)}(ch(u)) \mathfrak{q}_1(1_S)^{n-1} |0\rangle.$$

Par hypothèse de récurrence, le premier terme à droite est une formule universelle. D'après le lemme 7.2.7, chaque opérateur $\mathfrak{q}_1^{(\nu)}(ch(u))$ est une combinaison linéaire d'opérateurs $\mathfrak{q}_{n_1} \cdots \mathfrak{q}_{n_k}(\tau_k!(K_S^r ch(u)))$, pour des indices $n_i \in \mathbf{Z}$. Nous

n'avons donc pas tout-à-fait fini puisqu'il faut encore expliquer comment une composée $\mathbf{q}_{n_1} \cdots \mathbf{q}_{n_k}(\tau_{k!}(K_S^r ch(u))) \circ \mathbf{q}_1(1_S)^{n-1} |0\rangle$ se met sous la forme d'une combinaison linéaire universelle au sens de notre définition, *i.e.* ne faisant intervenir que des opérateurs de création. On écrit :

$$\begin{aligned} & \mathbf{q}_{n_1} \cdots \mathbf{q}_{n_k}(\tau_{k!}(K_S^r ch(u))) \circ \mathbf{q}_1(1_S)^{n-1} \\ &= [\mathbf{q}_{n_1} \cdots \mathbf{q}_{n_k}(\tau_{k!}(K_S^r ch(u))), \mathbf{q}_1(1_S)] \mathbf{q}_1(1_S)^{n-2} \\ &+ \mathbf{q}_1(1_S) \circ \mathbf{q}_{n_1} \cdots \mathbf{q}_{n_k}(\tau_{k!}(K_S^r ch(u))) \circ \mathbf{q}_1(1_S)^{n-2}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 7.2.6, le commutateur est une combinaison linéaire universelle faisant intervenir $K_S^r ch(u)$. De proche en proche, on fait ainsi passer à droite tout opérateur $\mathbf{q}_{n_1} \cdots \mathbf{q}_{n_k}(\tau_{k!}(-))$ contenant des indices $n_i < 0$. Dans un tel opérateur, on peut ensuite pousser à droite tous les indices négatifs grâce au lemme 7.2.8, en conservant une formule universelle. Par évaluation sur le vide, chaque terme commençant par un opérateur d'annihilation disparaît et il ne reste dans la formule universelle qu'une combinaison linéaire d'opérateurs de création, ce qui est la forme voulue dans notre définition d'une formule universelle.

Plus précisément, partant à nouveau de la formule :

$$n \cdot ch(u^{[n]}) = \mathbf{q}_1(1_S) ch(u^{[n-1]}) + \sum_{\nu \geq 0} \frac{1}{\nu!(n-1)!} \mathbf{q}_1^{(\nu)}(ch(u)) \mathbf{q}_1(1_S)^{n-1} |0\rangle,$$

posons $F(t) := \sum_{n \geq 1} ch(u^{[n]}) t^n$ (la somme commence en $n = 1$ puisque $u^{[0]} = 0$)

et sommons pour tout $n \geq 1$. On obtient :

$$F'(t) - \mathbf{q}_1(1_S)F(t) = \left(\sum_{\nu \geq 0} \frac{1}{\nu!} \mathbf{q}_1^{(\nu)}(ch(u)) \right) \exp(\mathbf{q}_1(1_S)t) |0\rangle.$$

Nous devons montrer que l'on peut passer l'exponentielle à gauche de la formule, de telle sorte qu'à droite on ait seulement une combinaison linéaire universelle ; après application sur le vide, le lemme 7.2.8 justifiera que l'on puisse se ramener à une combinaison d'opérateurs de création. Puisque les opérateurs dérivés $\mathbf{q}_1^{(\nu)}(-)$ sont des combinaisons linéaires universelles d'opérateurs, il suffit de traiter le cas :

$$\mathbf{q}_{n_1} \cdots \mathbf{q}_{n_k}(\tau_{k!}\alpha) \circ \exp(\mathbf{q}_1(1_S)) |0\rangle.$$

Si aucun des n_i n'est égal à -1 , il n'y a aucun problème car l'exponentielle commute avec $\mathbf{q}_{n_1} \cdots \mathbf{q}_{n_k}(\tau_{k!}\alpha)$. Sinon, quitte à utiliser le lemme 7.2.8, nous supposons que $n_k = -1$. On commence en observant le lemme suivant :

Lemme 7.2.12. — Pour tout $\alpha \in H^*(S)$, tout $x \in \mathbb{H}^S$ et tout $n \geq 0$ on a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_{-1}(\alpha) \mathfrak{q}_1(1_S)^n x &= -n \int_S \alpha \cdot \mathfrak{q}_1(1_S)^{n-1} x + \mathfrak{q}_1(1_S)^n \mathfrak{q}_{-1}(\alpha) x; \\ \mathfrak{q}_{-1}(\alpha) \exp(\mathfrak{q}_1(1_S)) x &= - \int_S \alpha \cdot \exp(\mathfrak{q}_1(1_S)) x + \exp(\mathfrak{q}_1(1_S)) \mathfrak{q}_{-1}(\alpha) x. \end{aligned}$$

Démonstration du lemme. — La deuxième formule résulte immédiatement de la première, qui pour sa part se voit par récurrence :

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_{-1}(\alpha) \mathfrak{q}_1(1_S)^{n+1} x &= [\mathfrak{q}_{-1}(\alpha), \mathfrak{q}_1(1_S)] \mathfrak{q}_1(1_S)^n x + \mathfrak{q}_1(1_S) \mathfrak{q}_{-1}(\alpha) \mathfrak{q}_1(1_S)^n x \\ &= - \int_S \alpha \cdot \mathfrak{q}_1(1_S)^n x \\ &\quad + \mathfrak{q}_1(1_S) \left(-n \int_S \alpha \cdot \mathfrak{q}_1(1_S)^{n-1} x + \mathfrak{q}_1(1_S)^n \mathfrak{q}_{-1}(\alpha) x \right) \\ &= -(n+1) \int_S \alpha \cdot \mathfrak{q}_1(1_S)^n x + \mathfrak{q}_1(1_S)^{n+1} \mathfrak{q}_{-1}(\alpha) x. \end{aligned}$$

□

Nous pouvons maintenant étudier la situation $\mathfrak{q}_{n_1} \cdots \mathfrak{q}_{n_k}(\tau_k! \alpha) \circ \exp(\mathfrak{q}_1(1_S)) |0\rangle$ pour $n_k = -1$. Notons la décomposition :

$$\tau_k! \alpha = \sum_i \alpha_{i,1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{i,k}.$$

Alors d'après le lemme précédent appliqué à $x = |0\rangle$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_{n_1} \cdots \mathfrak{q}_{n_k}(\tau_k! \alpha) \circ \exp(\mathfrak{q}_1(1_S)) |0\rangle &= \sum_i \mathfrak{q}_{n_1}(\alpha_{i,1}) \circ \cdots \circ \mathfrak{q}_{n_k}(\alpha_{i,k}) \circ \exp(\mathfrak{q}_1(1_S)) |0\rangle \\ &= - \sum_i \int_S \alpha_{i,k} \cdot \mathfrak{q}_{n_1}(\alpha_{i,1}) \circ \cdots \circ \mathfrak{q}_{n_{k-1}}(\alpha_{i,k-1}) \circ \exp(\mathfrak{q}_1(1_S)) |0\rangle. \end{aligned}$$

On utilise alors le fait suivant (voir [LQW03b, Lemme 3.1, formule 2]) :

$$\tau_{(k-1)!} \alpha = \sum_i \int_S \alpha_{i,k} \cdot \alpha_{i,1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{i,k-1},$$

qui permet de conclure que pour $n_k = -1$ on a :

$$\mathfrak{q}_{n_1} \cdots \mathfrak{q}_{n_k}(\tau_k! \alpha) \circ \exp(\mathfrak{q}_1(1_S)) |0\rangle = - \mathfrak{q}_{n_1} \cdots \mathfrak{q}_{n_{k-1}}(\tau_{(k-1)!} \alpha) \circ \exp(\mathfrak{q}_1(1_S)) |0\rangle.$$

En recommençant l'opération si d'autres indices sont égaux à -1 ou sinon en faisant commuter, on fait ainsi passer l'exponentielle à gauche.

On est finalement ramené à une équation différentielle :

$$F'(t) - \mathfrak{q}_1(1_S) F(t) = \exp(\mathfrak{q}_1(1_S) t) \mathfrak{F}(u) |0\rangle$$

où $\mathfrak{F}(u)|0\rangle$ est une formule universelle (avec seulement des opérateurs de création). Cette équation se résout aisément en :

$$F(t) = \exp(\mathfrak{q}_1(1_S)t)\mathfrak{F}(u)t|0\rangle,$$

ce qui achève la démonstration. \square

7.2.5.2. Classes de Chern des fibrés tautologiques. — Nous nous intéressons maintenant à des formules universelles pour des classes $\mathcal{U}_n^S := c_{tot}(u^{[n]})$ où $u \in K(S)$.

Lemme 7.2.13. — *Soit $u \in K(S)$. Les classes de Chern totales $c_{tot}(u^{[n]})$ admettent une formule génératrice universelle de la forme :*

$$\sum_{n \geq 0} c_{tot}(u^{[n]}) = \exp(\mathfrak{F}(u))|0\rangle$$

où $\mathfrak{F}(u)$ est une combinaison linéaire universelle (ne contenant que des opérateurs de création) dont l'argument dépend de $c_{tot}(u)$, K_S et e_S .

Démonstration. — Nous commençons par montrer qu'il existe une formule universelle, puis nous en déduisons que cette formule est de la forme indiquée.

Première étape. Nous avons montré dans le lemme 7.2.11 qu'il existe une formule universelle pour les caractères de Chern des fibrés tautologiques. Les formules de passage entre classes de Chern et caractères de Chern sont triangulaires. Par exemple :

$$\begin{aligned} ch_1 &= c_1, \\ ch_2 &= c_2 - \frac{1}{2}c_1^2, \\ ch_3 &= \frac{1}{2}c_3 + \frac{1}{6}(c_1^2 - 3c_1c_2), \\ &\dots \end{aligned}$$

Il en résulte, en procédant de proche en proche et en utilisant le lemme 7.2.10 disant que les produits cup sont des combinaisons linéaires universelles, que puisque les caractères de Chern sont universels, les classes de Chern aussi.

Cependant, cet argument ne précise pas si ce sont bien exactement les classes de Chern de u qui interviennent dans la formule (on voit plutôt apparaître les caractères de Chern). Pour ceci, on peut raisonner en partant de la deuxième formule du théorème 7.1.8 dont il résulte facilement (voir par exemple [Leh,

Corollaire 4.3]) :

$$\sum_n c_{tot}(u^{[n]}) = \exp \left(\sum_{\nu, k \geq 0} \binom{\text{rg}(u) - k}{\nu} q_1^{(\nu)}(c_k(u)) \right) |0\rangle$$

En développant l'exponentielle et en remplaçant les opérateurs dérivés par leurs formules universelles, on obtient une formule universelle faisant précisément intervenir les classes de Chern $c_k(u)$. Par évaluation sur le vide, en faisant passer à droite les opérateurs d'annihilation ainsi qu'il a été expliqué plus tôt, on récupère une formule universelle conforme à la définition, fonction des classes de Chern de u .

Deuxième étape. Notons \mathcal{U}^S la formule universelle pour la classe totale de Chern d'une classe tautologique $u^{[n]}$ pour $u \in K(S)$. Soit S_1, S_2 deux surfaces projectives lisses, n_1, n_2 des entiers positifs et $pr_i : S_1^{[n_1]} \times S_2^{[n_2]} \rightarrow S_i^{[n_i]}$ les projections. Pour $u_1 \oplus u_2 \in K(S_1 \amalg S_2) = K(S_1) \oplus K(S_2)$, on a la décomposition suivante (voir [EGL01, Théorème 4.2]⁽¹⁾) :

$$(u_1 \oplus u_2)^{[n_1+n_2]} \Big|_{S_1^{[n_1]} \times S_2^{[n_2]}} = pr_1^* \left(u_1^{[n_1]} \right) \oplus pr_2^* \left(u_2^{[n_2]} \right),$$

dont il résulte :

$$\mathcal{U}^{S_1 \amalg S_2} = \mathcal{U}^{S_1} \otimes \mathcal{U}^{S_2}.$$

On peut alors appliquer le lemme 7.2.5 pour conclure. \square

La première formule explicite ayant été obtenue dans ce sens et qui a motivé toute l'étude des formules universelles est le résultat suivant, qui illustre bien ce que nous cherchons :

Théorème 7.2.14 (Lehn). — [Leh99, Théorème 4.6] *Soit L un fibré en droites sur S . Alors :*

$$\sum_{n \geq 0} c_{tot}(L^{[n]}) = \exp \left(\sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m} q_m(c(L)) \right) |0\rangle.$$

7.2.6. Formules universelles pour le fibré tangent. — Par analogie avec les résultats obtenus pour les fibrés tautologiques, il est raisonnable d'attendre des formules universelles pour le fibré tangent au schéma de Hilbert.

Un résultat a déjà été obtenu dans cette direction. Pour toute partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ de $2n$, on note les *nombre de Chern* de S par :

$$c_\lambda(TS^{[n]}) := c_{\lambda_1}(TS^{[n]}) \cdots c_{\lambda_k}(TS^{[n]}) \in H^{4n}(S^{[n]}) \cong \mathbf{Q}.$$

⁽¹⁾La formule qui y figure est écrite avec un produit \cdot au lieu de la somme directe \oplus .

On a le résultat suivant :

Théorème 7.2.15 (Ellingsrud, Göttsche & Lehn)

[EGL01, Proposition 0.5] *Pour tout entier n et toute partition λ de $2n$, il existe un polynôme universel $P_\lambda \in \mathbf{Q}[z_1, z_2]$ tel que pour toute surface projective S on a :*

$$c_\lambda(TS^{[n]}) = P_\lambda(c_1(S)^2, c_2(S)).$$

Nous allons démontrer des énoncés plus précis au niveau des classes de Chern et, en suivant le même schéma que pour les fibrés tautologiques, nous commençons par montrer l'existence d'une formule universelle pour le caractère de Chern, puis nous en déduisons l'énoncé correspondant pour les classes de Chern (en fait, nous pourrions aussi bien démontrer directement l'existence de formules universelles pour les classes de Chern sans passer par les caractères de Chern, en suivant le plan de démonstration de [Leh99, Corollaire 4.3] que nous avons déjà utilisé, mais les formules sont plus difficiles à étudier).

7.2.6.1. *Caractère de Chern du fibré tangent.* —

Lemme 7.2.16. — *Il existe une formule universelle pour le caractère de Chern total du fibré tangent au schéma de Hilbert $S^{[n]}$ d'une surface projective lisse S , de la forme :*

$$\sum_{n \geq 0} ch(TS^{[n]}) = \exp(q_1(1_S)) \mathfrak{F} |0\rangle$$

où $\mathfrak{F} |0\rangle$ est une combinaison linéaire universelle.

Démonstration. — Nous commençons par rappeler quelques résultats géométriques (voir [Dan01, Leh99, EGL01]). Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} S^{[n,n+1]} & \xrightarrow{\psi} & S^{[n+1]} \\ & \searrow \varphi \quad \downarrow \sigma \quad \swarrow \rho & \\ & S^{[n]} \times S & \\ & \swarrow p \quad \uparrow \quad \searrow q & \\ S^{[n]} & \xleftarrow{\quad} \Xi_n \xrightarrow{\quad} S \end{array}$$

Alors $\sigma = (\varphi, \rho) : S^{[n,n+1]} \rightarrow S^{[n]} \times S$ est l'éclatement de $S^{[n]} \times S$ le long de la famille universelle Ξ_n , i.e. $S^{[n,n+1]} \cong \text{Bl}_{\Xi_n}(S^{[n]} \times S)$. On note E le diviseur exceptionnel et $\mathcal{L} := \mathcal{O}_{S^{[n,n+1]}}(-E)$. En notant T_n la classe du fibré

tangent $TS^{[n]}$ dans $K(S^{[n]})$, on a alors la formule suivante dans $K(S^{[n,n+1]})$ (voir [EGL01, Proposition 2.3]) :

$$\begin{aligned} \psi^! T_{n+1} = & \varphi^! T_n + \mathcal{L} - \mathcal{L} \cdot \sigma^!(\mathcal{O}_{\Xi_n})^\vee + \mathcal{L}^\vee \cdot \rho^! \omega_S^\vee \\ & - \mathcal{L}^\vee \cdot \sigma^!(\mathcal{O}_{\Xi_n}) \cdot \rho^! \omega_S^\vee - \rho^!(\mathcal{O}_S - T_S + \omega_S^\vee). \end{aligned}$$

Soit $\{b_i\}$ une base de $H^*(S)$ telle que $\int_S b_i b_j td(S) = \delta_{i,j}$. Dans la décomposition de Künneth $H^*(S^{[n]} \times S) \cong H^*(S^{[n]}) \otimes H^*(S)$, on peut écrire :

$$ch(\mathcal{O}_{\Xi_n}) = \sum_i \alpha_i \otimes b_i = \sum_i p^* \alpha_i \cdot q^* b_i$$

pour certaines classes α_i que nous allons déterminer. Par définition des classes tautologiques et en utilisant la formule de projection, on trouve :

$$\begin{aligned} b_j^{[n]} &= p_!(ch(\mathcal{O}_{\Xi_n}) \cdot q^* b_j \cdot q^* td(S)) \\ &= \sum_i p_!(p^* \alpha_i \cdot q^* b_i \cdot q^* b_j \cdot q^* td(S)) \\ &= \sum_i \alpha_i \cdot p_! q^*(b_i b_j td(S)) \\ &= \alpha_j, \end{aligned}$$

car puisque la composée $p_! q^* : H^i(S) \rightarrow H^{i-4}(S^{[n]})$ diminue le degré cohomologique de 4, seules les composantes cohomologiques de degré maximal $i = 4$ interviennent et $p_! q^*(b_i b_j td(S)) = \delta_{i,j}$. On obtient donc :

$$ch(\mathcal{O}_{\Xi_n}) = \sum_i b_i^{[n]} \otimes b_i = \sum_i p^* b_i^{[n]} \cdot q^* b_i.$$

De même, en définissant de manière analogue des classes tautologiques « duales » par :

$$\gamma^{\{n\}} := p_!(ch(\mathcal{O}_{\Xi_n}^\vee) \cdot q^* \gamma \cdot q^* td(S)),$$

on trouve :

$$ch(\mathcal{O}_{\Xi_n}^\vee) = \sum_i b_i^{\{n\}} \otimes b_i = \sum_i p^* b_i^{\{n\}} \cdot q^* b_i.$$

Notons $\mathbf{ch}T \in \text{End}(\mathbb{H}^S)$ l'opérateur agissant par multiplication par $ch(T_n)$ en chaque poids conforme n . Par analogie avec la notation $\mathfrak{G}(\gamma)$ pour l'opérateur agissant par multiplication par $\gamma^{[n]}$ en chaque poids conforme, on note $\mathfrak{G}^\vee(\gamma)$ l'opérateur multipliant par $\gamma^{\{n\}}$. Alors, en remarquant les

formules :

$$\begin{aligned}\sigma^* ch(\mathcal{O}_{\Xi_n}) &= \sum_i \varphi^* b_i^{[n]} \cdot \rho^* b_i \\ \sigma^* ch(\mathcal{O}_{\Xi_n}^\vee) &= \sum_i \varphi^* b_i^{\{n\}} \cdot \rho^* b_i\end{aligned}$$

et en calculant comme dans la démonstration de [Leh99, Théorème 4.2] (la seule différence étant qu'il y a plus de termes dans les formules) on obtient :

$$\begin{aligned}[\mathrm{ch}T, \mathfrak{q}_1(\alpha)] &= \sum_\nu \frac{1}{\nu!} \mathfrak{q}_1^{(\nu)}(\alpha) \\ &\quad - \sum_{i,\nu} \frac{1}{\nu!} \mathfrak{q}_1^{(\nu)}(b_i \alpha) \circ \mathfrak{G}^\vee(b_i) \\ &\quad + \sum_\nu \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \mathfrak{q}_1^{(\nu)}(ch(\omega_S^\vee) \alpha) \\ &\quad - \sum_{i,\nu} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \mathfrak{q}_1^{(\nu)}(b_i ch(\omega_S^\vee) \alpha) \circ \mathfrak{G}(b_i) \\ &\quad + \mathfrak{q}_1(ch(\mathcal{O}_S - T_S + \omega_S^\vee) \alpha).\end{aligned}$$

Puisque $c_1(T_S) = -K_S$, $c_2(T_S) = e_S$, $c_1(\omega_S) = K_S$, on déduit les caractères $ch(\omega_S) = 1 + K_S + \frac{1}{2}K_S^2$ et $ch(\mathcal{O}_S - T_S + \omega_S^\vee) = e_S + K_S^2$. Nous reprenons alors la même méthode que pour le lemme 7.2.11. Nous devons montrer que les classes de la forme suivante sont des formules universelles pour lesquelles on peut passer l'exponentielle à gauche de la formule :

$$(7.2 \text{ a}) \quad \mathfrak{q}_1^{(\nu)}(1_S) \exp(\mathfrak{q}_1(1_S)) |0\rangle,$$

$$(7.2 \text{ b}) \quad \sum_i \mathfrak{q}_1^{(\nu)}(b_i) \mathfrak{G}^\vee(b_i) \exp(\mathfrak{q}_1(1_S)) |0\rangle,$$

$$(7.2 \text{ c}) \quad \mathfrak{q}_1^{(\nu)}(\exp(-K_S)) \exp(\mathfrak{q}_1(1_S)) |0\rangle,$$

$$(7.2 \text{ d}) \quad \sum_i \mathfrak{q}_1^{(\nu)}(b_i \exp(-K_S)) \mathfrak{G}(b_i) \exp(\mathfrak{q}_1(1_S)) |0\rangle,$$

$$(7.2 \text{ e}) \quad \mathfrak{q}_1(e_S + K_S^2) \exp(\mathfrak{q}_1(1_S)) |0\rangle.$$

Les formules (7.2 a) et (7.2 c) ont été traitées précédemment et dans la formule (7.2 e) il n'y a rien à faire. Restent les formules (7.2 b) et (7.2 d). Nous traitons en détail la formule (7.2 d), puis nous expliquerons comment la formule (7.2 b) s'en déduit.

D'après le lemme 7.2.7, on peut supposer que $\mathfrak{q}_1^{(\nu)}(b_i \exp(-K_S))$ est simplement un opérateur $\mathfrak{q}_{n_1} \cdots \mathfrak{q}_{n_k}(\tau_k!(b_i \alpha))$ où α est un polynôme en K_S . On

calcule alors :

$$\mathfrak{q}_{n_1} \cdots \mathfrak{q}_{n_k}(\tau_k!(b_i\alpha))\mathfrak{G}(b_i)\exp(\mathfrak{q}_1(1_S))|0\rangle = \mathfrak{q}_{n_1} \cdots \mathfrak{q}_{n_k}(\tau_k!(b_i\alpha)) \sum_{n \geq 0} b_i^{[n]}.$$

Or, $b_i^{[n]} = ch((ch^{-1}b_i)^{[n]})$ donc d'après le lemme 7.2.11, $\sum_{n \geq 0} b_i^{[n]}$ admet une formule universelle de la forme $\exp(\mathfrak{q}_1(1_S))\mathfrak{F}(b_i)|0\rangle$ (voir aussi à ce sujet [LQW03b, Théorème 4.1]) où $\mathfrak{F}(b_i)|0\rangle$ est une combinaison linéaire universelle faisant intervenir la classe b_i (*i.e.* qu'elle intervient linéairement comme argument). Le lemme 7.2.12 appliqué à $x = \mathfrak{F}(b_i)|0\rangle$ montre alors, en raisonnant comme dans la démonstration du lemme 7.2.11, que l'expression :

$$\mathfrak{q}_{n_1} \cdots \mathfrak{q}_{n_k}(\tau_k!(b_i\alpha))\exp(\mathfrak{q}_1(1_S))\mathfrak{F}(b_i)|0\rangle$$

peut se mettre sous une forme similaire avec l'exponentielle à gauche, en facteur d'une combinaison linéaire de termes de la forme :

$$\mathfrak{q}_{i_1} \cdots \mathfrak{q}_{i_p}(\tau_p!(b_i\beta))\mathfrak{F}(b_i).$$

Par linéarité de la formule universelle $\mathfrak{F}(b_i)$, supposons qu'elle soit simplement un opérateur $\mathfrak{q}_{j_1} \cdots \mathfrak{q}_{j_q}(\tau_q!(b_i\gamma))$. Pour se débarrasser des classes b_i , qui empêchent de voir la formule universelle, on ré-introduit la somme sur les indices i qui avait été laissée de côté :

$$\begin{aligned} \sum_i (\mathfrak{q}_{i_1} \cdots \mathfrak{q}_{i_p}(\tau_p!(b_i\beta))) (\mathfrak{q}_{j_1} \cdots \mathfrak{q}_{j_q}(\tau_q!(b_i\gamma))) \\ = \mathfrak{q}_{i_1} \cdots \mathfrak{q}_{i_p} \mathfrak{q}_{j_1} \cdots \mathfrak{q}_{j_q} \left(\sum_i \tau_p!(b_i\beta) \otimes \tau_q!(b_i\gamma) \right) \end{aligned}$$

En utilisant les règles de calcul sur les inclusions diagonales (issues de la formule de projection : voir par exemple [LQW03b, Lemme 3.1]), partant de :

$$\tau_2!td(S) = \sum_i b_i \otimes b_i$$

on déduit :

$$\tau_2!(td(S)\beta\gamma) = \sum_i (b_i\beta) \otimes (b_i\gamma)$$

puis :

$$\tau_{(p+q)!}(td(S)\beta\gamma) = \sum_i \tau_p!(b_i\beta) \otimes \tau_q!(b_i\gamma)$$

avec quoi on conclut :

$$\begin{aligned} \sum_i (\mathbf{q}_{i_1} \cdots \mathbf{q}_{i_p}(\tau_{p!}(b_i\beta))) (\mathbf{q}_{j_1} \cdots \mathbf{q}_{j_q}(\tau_{q!}(b_i\gamma))) \\ = \mathbf{q}_{i_1} \cdots \mathbf{q}_{i_p} \mathbf{q}_{j_1} \cdots \mathbf{q}_{j_q}(\tau_{(p+q)!}(td(S)\beta\gamma)), \end{aligned}$$

ce qui montre que l'on a une formule universelle.

Pour traiter la formule (7.2 b) il suffit de remarquer que $ch(\mathcal{O}_{\Xi_n})$ et $ch(\mathcal{O}_{\Xi_n}^\vee)$ diffèrent seulement par leurs signes dans certains degrés, donc les opérateurs $\mathfrak{G}(\gamma)$ et $\mathfrak{G}^\vee(\gamma)$ se comportent similairement vis-à-vis de tous les lemmes que nous utilisons, les formules universelles étant simplement différentes relativement à certains signes. \square

7.2.6.2. *Classes de Chern du fibré tangent.* —

Lemme 7.2.17. — *Il existe une formule universelle pour la classe totale de Chern du fibré tangent au schéma de Hilbert $S^{[n]}$ d'une surface projective lisse S , de la forme :*

$$\sum_{n \geq 0} c_{tot} \left(TS^{[n]} \right) = \exp(\mathfrak{F}) |0\rangle$$

où \mathfrak{F} est une combinaison linéaire universelle dont l'argument dépend de $1_S, K_S, e_S$ (ne contenant que des opérateurs de création).

Démonstration. — La démonstration est identique à la démonstration du lemme 7.2.13 puisque, si S_1, S_2 sont deux surfaces projectives lisses, on a la décomposition :

$$T(S_1 \amalg S_2)^{[n_1+n_2]} \Big|_{S_1^{[n_1]} \times S_2^{[n_2]}} = pr_1^* \left(TS_1^{[n_1]} \right) \oplus pr_2^* \left(TS_2^{[n_2]} \right).$$

\square

7.3. Séries génératrices pour le fibré tautologique sur $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$

7.3.1. Classes de Chern. — La fibre du fibré tautologique B_n en un point fixe ξ_λ pour l'action de T est isomorphe à l'algèbre quotient $\mathbf{C}[x, y]/I_\lambda$ où I_λ est l'idéal monomial construit sur le diagramme de Young de λ : une base du quotient $\mathbf{C}[x, y]/I_\lambda$ est donc formée des monômes⁽²⁾ :

$$\mathcal{B}_\lambda = \{x^i y^j \mid (i, j) \in D(\lambda)\}.$$

⁽²⁾Ces conventions précises sont nécessaires à la cohésion de l'ensemble. Ce sont les mêmes que Nakajima [Nak96a] et Haiman [Hai98].

Par exemple, pour la partition $\lambda = (4, 3, 1)$:

$$\begin{array}{cccc} 1 & y & y^2 & y^3 \\ x & xy & xy^2 & \\ x^2 & & & \end{array}$$

Le tore T agit sur les indéterminées par $s.x = sx$, $s.y = s^{-1}y$ donc les poids de l'action sont les opposés des contenus des cellules $x \in D(\lambda) : i - j = -c(x)$. Dans notre exemple, les poids sont :

$$\begin{array}{cccc} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & \\ 2 & & & \end{array}$$

La k -ième classe de Chern du fibré tautologique est alors donnée par la formule :

Proposition 7.3.1 (Lehn & Sorger). — [LS01, Proposition 5.2]

$$c_k(B_n) = (-1)^k \sum_{\substack{\mu \vdash n \\ l(\mu) = n-k}} z_\mu^{-1} p_\mu.$$

Démonstration. — Nous allons donner une nouvelle démonstration de cette formule en utilisant le théorème 4.2.1 :

$$\begin{aligned} c_k(B_n) &= \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)} \sigma_k(\{-c(x) \mid x \in D(\lambda)\}) \sum_{\substack{\mu \vdash n \\ l(\mu) = n-k}} z_\mu^{-1} \chi_\mu^\lambda p_\mu \\ &= (-1)^k \sum_{\substack{\mu \vdash n \\ l(\mu) = n-k}} z_\mu^{-1} \left(\sum_{\lambda \vdash n} \chi_\mu^\lambda \frac{1}{h(\lambda)} \sigma_k(\{c(x) \mid x \in D(\lambda)\}) \right) p_\mu. \end{aligned}$$

Pour simplifier le terme entre parenthèses, partons de la formule de caractères de Frobenius (proposition 1.4.2) :

$$p_\mu = \sum_{\lambda \vdash n} \chi_\mu^\lambda s_\lambda,$$

et prenons $r \geq l(\lambda)$ indéterminées x_1, \dots, x_r que nous évaluons en 1. D'après la proposition 1.3.5, on a l'identité :

$$r^{l(\mu)} = \sum_{\lambda \vdash n} \chi_\mu^\lambda \prod_{x \in D(\lambda)} \frac{r + c(x)}{h(x)}.$$

C'est une identité polynomiale en r et en prenant dans le membre de droite le coefficient devant $r^{l(\mu)}$ on obtient la formule suivante, avec $k = n - l(\mu)$:

$$1 = \sum_{\lambda \vdash n} \chi_\mu^\lambda \frac{1}{h(\lambda)} \sigma_k(\{c(x) \mid x \in D(\lambda)\}).$$

Ainsi,

$$c_k(B_n) = (-1)^k \sum_{\substack{\mu \vdash n \\ l(\mu) = n-k}} z_\mu^{-1} p_\mu.$$

□

Il en résulte immédiatement :

Corollaire 7.3.2 (Lehn & Sorger). — [LS01]

$$c_{tot}(B_n) = \sum_{\lambda \vdash n} (-1)^{n-l(\lambda)} z_\lambda^{-1} p_\lambda.$$

On en déduit aisément (voir Lehn & Sorger [LS01, Proposition 5.2] et la référence indiquée) la série génératrice des classes de Chern du fibré tautologique :

Proposition 7.3.3 (Lehn). — [Leh99, Théorème 4.6]

$$\sum_{n \geq 0} c_{tot}(B_n) = \exp \left(\sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} \frac{p_m}{m} \right)$$

Démonstration. — Nous rappelons la démonstration usuelle. Notons h_λ les fonctions symétriques complètes et e_λ les fonctions symétriques élémentaires. Partant de la formule :

$$\Omega = \exp \left(\sum_{k \geq 1} \frac{p_k}{k} \right)$$

on déduit que $\Omega[x] = \frac{1}{1-x}$ puis :

$$\Omega[tX] = \prod_{i \geq 1} (1 - x_i t)^{-1} = \sum_{n \geq 0} h_n t^n.$$

On sait par ailleurs (voir dans Manivel [Man98]) que :

$$\omega h_n = e_n = \sum_{\lambda \vdash n} (-1)^{n-l(\lambda)} z_\lambda^{-1} p_\lambda,$$

donc en utilisant la proposition 7.3.2 :

$$\begin{aligned}\omega\Omega[tX] &= \sum_{n \geq 0} e_n t^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{\lambda \vdash n} (-1)^{n-l(\lambda)} z_\lambda^{-1} p_\lambda \right) t^n \\ &= \sum_{n \geq 0} c_{tot}(B_n) t^n.\end{aligned}$$

Par ailleurs on vérifie aisément, puisque $\omega p_k = (-1)^{k-1} p_k$:

$$\omega\Omega[tX] = \exp \left(\sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{p_k}{k} \right),$$

d'où la formule. □

7.3.2. Caractère de Chern. — Une conséquence du théorème 5.3.4 donne la série génératrice du caractère de Chern total du fibré tautologique, dont on vérifie qu'elle est du type prédit dans le lemme 7.2.11 :

Proposition 7.3.4. —

$$\sum_{n \geq 0} ch(B_n) = e^{p_1} \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{p_k}{k!}$$

Démonstration. — D'après le théorème 5.3.4, on a la formule :

$$ch(B_n) = \mathcal{D} \left(\frac{1}{n!} p_1^n \right).$$

L'opérateur \mathcal{D} est défini par :

$$\mathcal{D} = \left(- \sum_{r \geq 1} p_r t^r \right) \exp \left(- \sum_{r \geq 1} r \frac{\partial}{\partial p_r} t^{-r} \right) \Bigg|_{t^0},$$

ce qui donne en développant :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \left(- \sum_{r \geq 1} p_r t^r \right) \left(1 + \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\sum_{r \geq 1} r \frac{\partial}{\partial p_r} t^{-r} \right)^k \right) \Big|_{t^0} \\ &= \left(- \sum_{r \geq 1} p_r t^r \right) \left(1 + \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{n_1, \dots, n_k \geq 1} n_1 \cdots n_k \frac{\partial}{\partial p_{n_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial p_{n_k}} t^{-(n_1 + \cdots + n_k)} \right) \Big|_{t^0} \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \sum_{n_1, \dots, n_k \geq 1} n_1 \cdots n_k p_{n_1 + \cdots + n_k} \frac{\partial}{\partial p_{n_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial p_{n_k}}. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\mathcal{D}(p_1^n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} p_1^{n-k} p_k,$$

donc :

$$ch(B_n) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!(n-k)!} p_1^{n-k} p_k,$$

dont on déduit la série génératrice annoncée. \square

7.4. Séries génératrices pour le fibré tangent sur $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$

7.4.1. Classes de Chern. — Les poids du fibré tangent à $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ en un point ξ_λ sont les longueurs d'équerres et leurs opposées :

$$\{h(x), -h(x) \mid x \in D(\lambda)\}.$$

Soit $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}$ des indéterminées. Les fonctions symétriques élémentaires $\sigma_k(x_1, \dots, x_{2n})$ sont définies par l'identité :

$$\prod_{i=1}^{2n} (1 + x_i t) = \sum_{k=0}^{2n} \sigma_k(x_1, \dots, x_{2n}) t^k.$$

Si l'on pose $x_{n+i} = -x_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$ on obtient :

$$\prod_{i=1}^{2n} (1 + x_i t) = \prod_{i=1}^n (1 - x_i^2 t^2)$$

ce qui donne les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_{2k+1}(x_1, -x_1, \dots, x_n, -x_n) &= 0 \\ \sigma_{2k}(x_1, -x_1, \dots, x_n, -x_n) &= (-1)^k \sigma_k(x_1^2, \dots, x_n^2). \end{aligned}$$

Il en résulte les formules suivantes pour les classes de Chern du fibré tangent :

$$c_{2k+1}(T \operatorname{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) = 0$$

$$c_{2k}(T \operatorname{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) = (-1)^k \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)} \sigma_k(\{h(x)^2 \mid x \in D(\lambda)\}) [s_\lambda]_{2k}.$$

Remarque 7.4.1. — L'annulation des classes de Chern impaires du fibré tangent $T \operatorname{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ est bien connue : on peut le voir en utilisant la structure symplectique sur $\operatorname{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ (théorème 3.1.3) qui entraîne un isomorphisme du fibré tangent avec son dual, ce qui force l'annulation des classes de Chern impaires.

Proposition 7.4.2. —

$$\sum_{n \geq 0} c_{n-1}(T \operatorname{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k C_k \frac{p_{2k+1}}{2k+1},$$

où $C_k := \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$ est le k -ième nombre de Catalan.

Remarque 7.4.3. — Les nombres de Catalan apparaissent déjà dans le contexte du schéma de Hilbert de points sur le plan affine dans l'article de Haiman [Hai98].

Démonstration. — Si n est pair, nous savons que $c_{n-1}(T \operatorname{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) = 0$. Supposons donc que $n = 2k + 1$ et posons $\alpha_k := c_{2k}(T \operatorname{Hilb}^{2k+1} \mathbf{C}^2)$. Nous allons démontrer que $\alpha_k = (-1)^k C_k \frac{p_{2k+1}}{2k+1}$. D'après le théorème 4.2.1, on a :

$$\alpha_k = \sum_{\lambda \vdash 2k+1} \frac{1}{h(\lambda)} \operatorname{Coeff} \left(t^{2k}, \prod_{x \in D(\lambda)} (1 - h(x)^2 t^2) \right) \sum_{\substack{\mu \vdash 2k+1 \\ l(\mu)=1}} \chi_\mu^\lambda z_\mu^{-1} p_\mu.$$

Dans la deuxième somme, seule la partition $\mu = (2k+1)$ intervient d'où :

$$\alpha_k = \sum_{\lambda \vdash 2k+1} \frac{1}{h(\lambda)} \operatorname{Coeff} \left(t^{2k}, \prod_{x \in D(\lambda)} (1 - h(x)^2 t^2) \right) \chi_{(2k+1)}^\lambda \frac{p_{2k+1}}{2k+1}.$$

D'après Fulton & Harris [FH91, Exercice 4.16], l'évaluation d'un caractère χ^λ en un cycle maximal suit la formule suivante :

$$\chi_{(2k+1)}^\lambda = \begin{cases} (-1)^s & \text{si } \lambda = (2k+1-s, 1, \dots, 1), 0 \leq s \leq 2k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour une telle partition $\lambda = (2k+1-s, 1, \dots, 1)$, on constate que les longueurs d'équerres sont les entiers $\{1, \dots, s\}$, $\{1, \dots, 2k-s\}$ et $2k+1$ d'où :

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \sum_{s=0}^{2k} \frac{(-1)^s}{(2k+1)s!(2k-s)!} \text{Coeff} \left(t^{2k}, \prod_{i=1}^s (1-i^2 t^2) \prod_{j=1}^{2k-s} (1-j^2 t^2) (1-(2k+1)^2 t^2) \right) \frac{p_{2k+1}}{2k+1} \\ &= \text{Coeff} \left(t^{2k}, \frac{(1-(2k+1)^2 t^2)}{2k+1} \sum_{s=0}^{2k} \frac{(-1)^s}{s!(2k-s)!} \prod_{i=1}^s (1-i^2 t^2) \prod_{j=1}^{2k-s} (1-j^2 t^2) \right) \frac{p_{2k+1}}{2k+1}. \end{aligned}$$

Étudions le polynôme :

$$P_k := \sum_{s=0}^{2k} \frac{(-1)^s}{s!(2k-s)!} \prod_{i=1}^s (1-i^2 t^2) \prod_{j=1}^{2k-s} (1-j^2 t^2).$$

Introduisons les *symboles de Pochhammer* :

$$(a)_r := a(a+1) \cdots (a+r-1) \text{ pour } r \geq 1$$

et modifions l'expression de P_k de manière à les faire apparaître :

$$\begin{aligned} P_k &= \sum_{s=0}^{2k} \frac{(-1)^s}{s!(2k-s)!} \prod_{i=1}^s (i^2 t^2 - 1) \prod_{j=1}^{2k-s} (j^2 t^2 - 1) \\ &= t^{4k} \sum_{s=0}^{2k} \frac{(-1)^s}{s!(2k-s)!} \prod_{i=1}^s \left(i^2 - \frac{1}{t^2} \right) \prod_{j=1}^{2k-s} \left(j^2 - \frac{1}{t^2} \right) \\ &= t^{4k} \sum_{s=0}^{2k} \frac{(-1)^s}{s!(2k-s)!} \prod_{i=1}^s \left(i - \frac{1}{t} \right) \left(i + \frac{1}{t} \right) \prod_{j=1}^{2k-s} \left(j - \frac{1}{t} \right) \left(j + \frac{1}{t} \right) \\ &= t^{4k} \sum_{s=0}^{2k} (-1)^s \frac{\left(1 - \frac{1}{t}\right)_s \left(1 + \frac{1}{t}\right)_s}{s!} \frac{\left(1 - \frac{1}{t}\right)_{2k-s} \left(1 + \frac{1}{t}\right)_{2k-s}}{(2k-s)!} \end{aligned}$$

On observe alors le lemme suivant :

Lemme 7.4.4. — Pour tous a, b et tout entier $k \geq 0$ on a l'identité :

$$\sum_{s=0}^{2k} (-1)^s \frac{(a)_s (b)_s}{s!} \frac{(a)_{2k-s} (b)_{2k-s}}{(2k-s)!} = \frac{1}{k!} \frac{(a+b)_{2k} (a)_k (b)_k}{(a+b)_k}.$$

Démonstration du lemme. — Rappelons la définition d'une fonction hypergéométrique généralisée :

$${}_p F_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) := \sum_{n \geq 0} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n} \frac{z^n}{n!}.$$

Nous utilisons l'identité produit suivante, que l'on trouvera dans [MOS66, §II.2.9, p. 63, 4^e formule] :

$${}_2F_0(a, b; -z) {}_2F_0(a, b; z) = {}_4F_1\left(a, b, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b+1}{2}; a+b; 4z^2\right).$$

En développant et en comparant les coefficients devant z^{2k} , on obtient la formule voulue. En effet, on a :

$${}_2F_0(a, b; z) = \sum_{s \geq 0} \frac{(a)_s (b)_s}{s!} z^s$$

donc en développant, puisque le terme de gauche est pair, il ne contient que des termes pairs en z et il vaut :

$${}_2F_0(a, b; -z) {}_2F_0(a, b; z) = \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{s=0}^{2k} (-1)^s \frac{(a)_s (b)_s}{s!} \frac{(a)_{2k-s} (b)_{2k-s}}{(2k-s)!} \right) z^{2k}$$

tandis que le terme de droite vaut :

$${}_4F_1\left(a, b, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b+1}{2}; a+b; 4z^2\right) = \sum_{k \geq 0} 4^k \frac{(a)_k (b)_k \left(\frac{a+b}{2}\right)_k \left(\frac{a+b+1}{2}\right)_k}{k! (a+b)_k} z^{2k}$$

et on constate aisément que $\left(\frac{a+b}{2}\right)_k \left(\frac{a+b+1}{2}\right)_k = \frac{1}{4^k} (a+b)_{2k}$. \square

Ainsi, avec $a = 1 - \frac{1}{t}$ et $b = 1 + \frac{1}{t}$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} P_k &= t^{4k} \frac{1}{k!} \frac{(2k+1)! \left(1 - \frac{1}{t}\right)_k \left(1 + \frac{1}{t}\right)_k}{(k+1)!} \\ &= \frac{(2k+1)!}{k! (k+1)!} t^{4k} \prod_{i=1}^k \left(i - \frac{1}{t}\right) \left(i + \frac{1}{t}\right) \\ &= (-1)^k (2k+1) C_k t^{2k} \prod_{i=1}^k (1 - i^2 t^2). \end{aligned}$$

Il en résulte immédiatement :

$$\alpha_k = (-1)^k C_k \frac{p_{2k+1}}{2k+1},$$

ce qui achève la démonstration. \square

Remarque 7.4.5. — Je remercie Marc Nieper-Wißkirchen pour son aide dans la formulation hypergéométrique du lemme au centre de cette démonstration.

Remarque 7.4.6. — L'énoncé précédent a été obtenu initialement par quelques expérimentations et un peu de numérologie, grâce à l'aide inspirée de Manfred Lehn qui a aussi permis de deviner la série génératrice des classes de Chern du fibré tangent :

Théorème 7.4.7. — *Les classes de Chern du fibré tangent sur $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ admettent la formule génératrice suivante :*

$$\sum_{n \geq 0} c_{\text{tot}}(T \text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) = \exp \left(\sum_{k \geq 0} (-1)^k C_k \frac{p_{2k+1}}{2k+1} \right),$$

où $C_k := \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$ est le k -ième nombre de Catalan.

Démonstration. — D'après le lemme 7.2.17, les classes totales de Chern du fibré tangent sur $\mathbb{P}_2^{[n]}$ sont données par une formule universelle de la forme :

$$\sum_{n \geq 0} c_{\text{tot}}(T \mathbb{P}_2^{[n]}) = \exp(\mathfrak{F}) |0\rangle$$

où \mathfrak{F} est une combinaison linéaire universelle d'opérateurs $\mathbf{q}_{n_1} \cdots \mathbf{q}_{n_k}(\tau_{k!} \alpha)$ dont l'argument dépend de $1_{\mathbb{P}_2}$, $K_{\mathbb{P}_2}$ et $e_{\mathbb{P}_2}$. l'inclusion $\mathbf{C}^2 \subset \mathbb{P}_2$ induit une immersion ouverte $\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2) \subset \mathbb{P}_2^{[n]}$ qui donne une surjection $\mathbb{H}^{\mathbb{P}_2} \rightarrow \mathbb{H}^{\mathbf{C}^2}$. Puisque les restrictions au plan affine des classes $K_{\mathbb{P}_2}$ et $e_{\mathbb{P}_2}$ sont nulles et que les morphismes d'inclusion diagonale $\tau_{k!}$ sont nuls dès que $k \geq 2$ (car la cohomologie du plan affine est triviale), la formule pour la classe de Chern totale du fibré tangent se simplifie et, en notant $\mathbf{q}_m := \mathbf{q}_m(1_{\mathbf{C}^2})$ et en utilisant l'identification entre \mathbf{q}_m et la fonction de Newton p_m , on voit que la formule s'écrit simplement sous la forme :

$$\sum_{n \geq 0} c_{\text{tot}}(T \text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) = \exp \left(\sum_{m \geq 1} f_m p_m \right).$$

En comparant les degrés cohomologiques pouvant intervenir, on constate que :

$$\sum_{n \geq 0} c_{n-1}(T \text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) = \sum_{m \geq 1} f_m p_m.$$

Ainsi, la formule résulte directement de la proposition 7.4.2. \square

7.4.2. Caractère de Chern. — En utilisant le même procédé que pour le calcul des classes de Chern, nous calculons le caractère de Chern du fibré tangent :

Proposition 7.4.8. —

$$\sum_{n \geq 0} ch(T \text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) = 2e^{p_1} \sum_{k \geq 0} \frac{p_{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Démonstration. — La démonstration est similaire à la démonstration de la formule de classes de Chern. Puisqu'il existe une formule universelle de la forme $\exp(\mathfrak{q}_1(1_S))\mathfrak{F}|0\rangle$ où \mathfrak{F} est une combinaison linéaire, dans le cas du plan affine cette formule est simplement du type :

$$\sum_{n \geq 0} ch(T \text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) = e^{p_1} \sum_{m \geq 1} f_m p_m.$$

En regardant les degrés cohomologiques maximaux pouvant apparaître, on constate alors que :

$$\sum_{n \geq 1} ch_{n-1}(T \text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) = \sum_{m \geq 1} f_m p_m.$$

D'après le théorème 4.2.1, on a :

$$ch_{n-1}(T \text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)} \left(\sum_{x \in D(\lambda)} (1 + (-1)^{n-1}) h(x)^{n-1} \right) \sum_{\substack{\mu \vdash n \\ l(\mu)=1}} z_\mu^{-1} \chi_\mu^\lambda p_\mu,$$

dont on déduit que $ch_{n-1}(T \text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) = 0$ si n est pair. On suppose donc que $n = 2k + 1$. Alors :

$$\alpha_k := ch_{2k}(T \text{Hilb}^{2k+1}(\mathbf{C}^2)) = \frac{2}{(2k)!} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)} \left(\sum_{x \in D(\lambda)} h(x)^{2k} \right) \chi_{(2k+1)}^\lambda \frac{p_{2k+1}}{2k+1}.$$

Par le même argument que précédemment, seules contribuent les partitions λ qui sont des équerres et :

$$\alpha_k = 2 \sum_{s=0}^{2k} \frac{(-1)^s}{(2k+1)s!(2k-s)!} \left(\sum_{i=1}^s i^{2k} + \sum_{j=1}^{2k-s} j^{2k} + (2k+1)^{2k} \right) \frac{p_{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Il est clair que $\sum_{s=0}^{2k} \frac{(-1)^s}{s!(2k-s)!} = 0$ donc le troisième terme dans la parenthèse ne contribue pas dans α_k .

Nous calculons le premier terme :

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{2k} \frac{(-1)^s}{s!(2k-s)!} \sum_{i=1}^s i^{2k} &= \sum_{i=1}^{2k} \sum_{s=i}^{2k} \frac{(-1)^s i^{2k}}{s!(2k-s)!} \\ &= - \sum_{i=1}^{2k} \sum_{s=0}^{i-1} \frac{(-1)^s i^{2k}}{s!(2k-s)!} \\ &= - \frac{1}{(2k)!} \sum_{i=1}^{2k} i^{2k} \sum_{s=0}^{i-1} (-1)^s \binom{2k}{s} \end{aligned}$$

En utilisant la formule $\sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^p \binom{n-1}{p}$ (immédiate par récurrence sur p) puis la formule élémentaire $\binom{n-1}{p-1} = \frac{p}{n} \binom{n}{p}$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{2k} \frac{(-1)^s}{s!(2k-s)!} \sum_{i=1}^s i^{2k} &= \frac{1}{(2k)!} \sum_{i=1}^{2k} (-1)^i \binom{2k-1}{i-1} i^{2k} \\ &= \frac{1}{2k \cdot (2k)!} \sum_{i=1}^{2k} (-1)^i \binom{2k}{i} i^{2k+1} \\ &= \frac{1}{2k \cdot (2k)!} \sum_{i=0}^{2k} (-1)^i \binom{2k}{i} i^{2k+1}. \end{aligned}$$

On observe alors le lemme suivant :

Lemme 7.4.9. — *Pour tout $n \geq 0$, on a :*

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^{n+1} = \binom{n+1}{2} n!$$

Démonstration du lemme. — Rappelons des propriétés élémentaires des nombres de Stirling de deuxième espèce. $S(n, k)$ est le nombre de partitions en k blocs d'un ensemble à n éléments et on a la formule suivante (voir par exemple [Com70]) :

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n.$$

En particulier, on déduit (en ré-indexant) :

$$S(n+1, n) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^{n+1}$$

et par ailleurs $S(n+1, n)$ est le nombre de manières de partitionner un ensemble à $n+1$ éléments en n blocs, ce qui revient à choisir deux éléments que l'on met dans la même partition, les autres blocs étant des singletons. Autrement dit, $S(n+1, n) = \binom{n+1}{2}$, d'où le résultat. \square

En appliquant ce lemme on trouve enfin :

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{2k} \frac{(-1)^s}{s!(2k-s)!} \sum_{i=1}^s i^{2k} &= \frac{1}{2k \cdot (2k)!} \binom{2k+1}{2} (2k)! \\ &= \frac{2k+1}{2}. \end{aligned}$$

Le deuxième terme est identique :

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{2k} \frac{(-1)^s}{s!(2k-s)!} \sum_{j=1}^{2k-s} j^{2k} &= \sum_{j=1}^{2k} \sum_{s=0}^{2k-j} \frac{(-1)^s j^{2k}}{s!(2k-s)!} \\ &= - \sum_{j=1}^{2k} \sum_{s=2k-j+1}^{2k} \frac{(-1)^s j^{2k}}{s!(2k-s)!} \\ &= - \sum_{j=1}^{2k} \sum_{s=0}^{j-1} \frac{(-1)^s j^{2k}}{s!(2k-s)!} \\ &= \frac{2k+1}{2}. \end{aligned}$$

De ces formules, on déduit immédiatement que $\alpha_k = 2 \frac{p_{2k+1}}{(2k+1)!}$, ce qui achève la démonstration. \square

On en déduit l'observation suivante :

Corollaire 7.4.10. — Dans $K(\text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2))$, on a l'identité :

$$T \text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2) = B_n + B_n^*.$$

Démonstration. — Pour montrer cette identité, il suffit de montrer que $ch(T \text{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)) = ch(B_n) + ch(B_n^*)$, ce qui est immédiat d'après les formules données dans la proposition 7.3.4 et la proposition 7.4.8. \square

Remarque 7.4.11. — L'intérêt de cette identité est que, pour une surface projective lisse S , ainsi qu'il est expliqué dans la démonstration de [EGL01, Proposition 2.2], on a la décomposition suivante :

$$TS^{[n]} = B_n^S + (B_n^S)^* - p!(\mathcal{O}_{\Xi_n^S}^\vee \cdot \mathcal{O}_{\Xi_n^S}).$$

Ainsi, pour $S = \mathbf{C}^2$, le terme superflu est nul.

APPENDICE A

HOMOLOGIE ET COHOMOLOGIE

Nous expliquons ici les notations et les conventions utilisées en cohomologie tout au long des pages précédentes. Elles viennent pour l'essentiel de Chriss & Ginzburg [CG97], Fulton [Ful97, Appendice B] et Manivel [Man98, Appendice].

Soit X un espace topologique séparé localement compact. Nous notons $H_*^{BM}(X)$ l'homologie de Borel-Moore à coefficients rationnels : c'est l'homologie de chaînes singulières infinies à support fini sur tout compact, ou de manière équivalente, l'homologie relative $H_*(\overline{X}, \{\infty\})$ pour la compactification à un point $\overline{X} = X \cup \{\infty\}$. Si X est compact, l'homologie de Borel-Moore est simplement l'homologie. Nous notons $H^*(X)$ la cohomologie singulière à coefficients rationnels. Le produit *cup* :

$$\cup : H^p(X) \times H^q(X) \rightarrow H^{p+q}(X)$$

fait de $H^*(X)$ une \mathbf{Q} -algèbre graduée d'unité notée $1_X \in H^0(X)$. Le produit *cap* :

$$\cap : H^p(X) \times H_q^{BM}(X) \rightarrow H_{q-p}^{BM}(X)$$

fait de $H_*^{BM}(X)$ un $H^*(X)$ -module gradué.

Une application continue $f : X \rightarrow Y$ induit une image réciproque $f^* : H^*(Y) \rightarrow H^*(X)$ qui est un morphisme d'anneaux ; si f est fermée, elle induit aussi une image directe $f_* : H_*^{BM}(X) \rightarrow H_*^{BM}(Y)$ vérifiant la *formule de projection* :

$$f_*(f^*(x) \cap y) = x \cap f_*(y).$$

Si X est une variété topologique orientée de dimension réelle n , elle admet une classe fondamentale en homologie $\vartheta_X \in H_n^{BM}(X)$ permettant la construction de la *dualité de Poincaré* :

$$D_X : H^q(X) \rightarrow H_{n-p}^{BM}(X)$$

définie par $D_X(x) = x \cap \vartheta_X$. La dualité de Poincaré est un isomorphisme et permet de définir des *classes fondamentales de cohomologie* : si $Y \xrightarrow{j} X$ est l'inclusion d'une sous-variété topologique fermée de dimension k , on note $[Y] := D_X^{-1} j_* \vartheta_Y \in H^{n-k}(X)$. En particulier, $[X] = 1_X$.

Si $f : X \rightarrow Y$ est une application fermée entre variétés topologiques orientées, la dualité de Poincaré permet de définir une image directe en cohomologie :

$$f_! : H^*(X) \rightarrow H^*(Y)$$

donnée par $f_! := D_Y^{-1} f_* D_X$ et vérifiant la *formule de projection* :

$$f_!(f^*(x) \cup y) = x \cup f_!(y).$$

APPENDICE B

COHOMOLOGIE ÉQUIVARIANTE

Nous expliquons maintenant les notations et les conventions utilisées en cohomologie équivariante tout au long des pages précédentes. Elles viennent pour l'essentiel de Brion [Bri98, Bri00].

Soit $T = \mathbf{C}^*$ le tore algébrique. Pour tout entier $m \geq 1$ posons :

$$E_{T,m} := \mathbf{C}^{m+1} - \{0\} \text{ et } B_{T,m} := \mathbb{P}_{\mathbf{C}}^m.$$

Le quotient $\pi_m : E_{T,m} \rightarrow B_{T,m}$ pour l'action naturelle de T est un T -fibré principal. Pour les inclusions évidentes on obtient un système inductif :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \hookrightarrow & E_{T,m} & \hookrightarrow & E_{T,m+1} & \hookrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \pi_m & & \downarrow \pi_{m+1} & & \\ \cdots & \hookrightarrow & B_{T,m} & \hookrightarrow & B_{T,m+1} & \hookrightarrow & \cdots \end{array}$$

dont les limites inductives sont notées :

$$\begin{aligned} E_T &:= \varinjlim E_{T,m}, \\ B_T &:= \varinjlim B_{T,m}, \\ \pi &:= \varinjlim \pi_m. \end{aligned}$$

La limite inductive $\pi : E_T \rightarrow B_T$ est encore un T -fibré principal (la trivialité locale n'est pas immédiate et résulte de [MS74, Lemme 5.4]) et vérifie la propriété universelle suivante : pour tout espace paracompact X et tout T -fibré principal F sur X , il existe une application continue $f : X \rightarrow B_T$ unique à homotopie près telle que $F \cong f^*E_T$.

Soit X un espace topologique séparé muni d'une action de T . Le groupe T agit diagonalement sur le produit $X \times E_T$. Cette action est libre et on note le

quotient :

$$X_T := (X \times E_T)/T \text{ (ou encore } X \times_T E_T \text{)}.$$

L'algèbre de cohomologie de X_T est notée $H_T^*(X)$ et est appelée *algèbre de cohomologie équivariante de X* . Le produit *cup* est noté :

$$\cup : H_T^p(X) \times H_T^q(X) \rightarrow H_T^{p+q}(X)$$

et le neutre est noté $1_X \in H_T^0(X)$.

La fonctorialité de la construction $X \mapsto X_T$ permet d'étendre les constructions usuelles au cadre équivariant. Toute application T -équivariante $f : X \rightarrow Y$ induit une image réciproque $f^* : H_T^*(Y) \rightarrow H_T^*(X)$ qui est un morphisme d'anneaux.

En vertu de la projection naturelle $X_T \rightarrow B_T$, $H_T^*(X)$ est naturellement une algèbre graduée sur $H^*(B_T) = H^*(pt)$ et les morphismes d'image réciproque f^* sont $H^*(B_T)$ -linéaires.

Si F est un fibré vectoriel T -équivariant sur X , F_T est un fibré vectoriel sur X_T . On définit les *classes de Chern équivariantes* de F comme les classes de Chern du fibré F_T :

$$c_k^T(F) := c_k(F_T) \in H_T^{2k}(X)$$

et de même les *caractères de Chern équivariants* $ch_k^T(F) := ch_k(F_T)$. Le lien avec les classes de Chern usuelles est fourni ainsi : si $X \xrightarrow{j} X_T$ est l'inclusion d'une fibre dans la projection $X_T \rightarrow B_T$, on a par fonctorialité des classes de Chern : $j^*(c_k^T(F)) = c_k(F)$ et $j^*(ch_k^T(F)) = ch_k(F)$.

Supposons que X est une variété topologique de dimension réelle n . Pour calculer la cohomologie équivariante de X on peut remplacer l'espace classifiant par son approximation algébrique $E_{T,m} \rightarrow B_{T,m}$. De fait, puisque $H^i(E_{T,m}) = 0$ pour $i = 1, \dots, 2m$ on a en utilisant la suite spectrale de Serre :

$$H_T^q(X) = H^q(X \times_T E_{T,m}) \quad \forall q \leq 2m.$$

En se servant des approximations algébriques on peut construire l'*homologie équivariante* en posant $H_q^T(X) := H_{q+2m}^{BM}(X \times_T E_{T,m})$ pour tout $q \leq 2m$ (cette définition ne dépend pas de m s'il est assez grand : on trouvera les détails dans [Bri00, p.3], [Lus88, Lemme 1.2]). Puisque $X \times_T E_{T,m}$ est de dimension réelle $n+2m$, la dualité de Poincaré usuelle $H^q(X \times_T E_{T,m}) \rightarrow H_{n+2m-q}^{BM}(X \times_T E_{T,m})$ donnée par le produit *cap* avec la classe fondamentale d'homologie de $X \times_T E_{T,m}$ devient une opération $D : H_T^q(X) \rightarrow H_{n-q}^T(X)$ qui tient lieu de dualité de Poincaré pour la théorie équivariante. On note alors ϑ_X^T la classe fondamentale d'homologie équivariante par laquelle D opère par produit *cap*,

lui-même noté :

$$\cap : H_T^p(X) \times H_q^T(X) \rightarrow H_{q-p}^T(X)$$

et faisant de $H_*^T(X)$ un $H_T^*(X)$ -module gradué.

Une application fermée T -équivariante $f : X \rightarrow Y$ induit une image directe $f_* : H_*^T(X) \rightarrow H_*^T(Y)$ vérifiant la *formule de projection* :

$$f_*(f^*(x) \cap y) = x \cap f_*(y).$$

La dualité de Poincaré est un isomorphisme et permet de définir des *classes fondamentales de cohomologie équivariante* : si $Y \xrightarrow{j} X$ est l'inclusion d'une sous-variété topologique T -stable fermée de dimension k , on note :

$$[Y]_T := D_X^{-1} j_* \vartheta_X^T \in H_T^{n-k}(X).$$

Si $f : X \rightarrow Y$ est une application fermée T -équivariante entre variétés topologiques orientées, la dualité de Poincaré permet de définir une image directe en cohomologie équivariante :

$$f_! : H_T^*(X) \rightarrow H_T^*(Y)$$

vérifiant la *formule de projection* :

$$f_!(f^*(x) \cup y) = x \cup f_!(y).$$

En particulier, cette formule implique que $f_!$ est $H_T^*(B_T)$ -linéaire.

On connaît l'isomorphisme d'algèbres $H^*(B_T) \cong \mathbf{Q}[u]$ où u est une indéterminée de degré 2. Par ailleurs, l'anneau de représentations $R(T)$ est isomorphe à l'anneau des caractères sur T , *i.e.* les morphismes algébriques $\mathbf{C}^* \rightarrow \mathbf{C}^*$. Ils sont tous de la forme $\chi_k : s \mapsto s^k$ pour $k \in \mathbf{Z}$. En notant L_k la représentation de rang 1 de caractère χ_k , on a $L_k = L_1^{\otimes k}$. Une représentation L de T permet de construire un fibré de rang 1 sur B_T noté L_T . En lui associant sa classe de Chern, on construit une application $R(T) \rightarrow H^*(B_T)$, $L \mapsto c_1(L_T)$ telle que L_1 est envoyé sur u et par les formules classiques sur la première classe de Chern, L_k est envoyé sur ku .

L'outil essentiel que nous utilisons est le théorème de localisation dont nous présentons ici une version suffisante pour notre contexte. Soit X une variété algébrique complexe (non supposée compacte) sur laquelle le groupe T agit algébriquement. Soit X^T le lieu de X des points fixes sous T , que nous supposons fini. L'inclusion $\iota : X^T \hookrightarrow X$ induit un morphisme d'image directe en cohomologie équivariante :

$$\iota_! : H_T^*(X^T) \rightarrow H_T^*(X).$$

Ainsi qu'il a été rappelé, c'est un morphisme de $\mathbf{Q}[u]$ -modules. Le théorème de localisation affirme que $\iota_!$ devient un isomorphisme après localisation. Précisément, en chaque $x \in X^T$, l'espace tangent $T_x X$ est une représentation de T et admet des classes de Chern équivariantes dans $H^*(B_T) \cong \mathbf{Q}[u]$. Si l'on rend inversibles les classes d'Euler équivariantes $c_{max}^T(T_x X)$, alors $\iota_!$ devient inversible et son inverse est :

$$\alpha \mapsto \sum_{x \in X} \frac{\iota_x^* \alpha}{c_{max}^T(T_x X)} 1_x \in \bigoplus_{x \in X^T} H_T^*(x) \cong H^*(X^T) \text{ (localisés)}$$

où $\iota_x : \{x\} \hookrightarrow X$ désigne l'inclusion d'un point et 1_x la classe fondamentale de cohomologie dans $H_T^*(x)$.

APPENDICE C

K-THÉORIE

Nous reprenons ici quelques notions classiques autour de la K-théorie et du caractère de Chern, en suivant Borel & Serre [BS58] et Chriss & Ginzburg [CG97]. Une référence pour tout ce contenu est Grothendieck [Gro, exp. 0, appendice, ch. II].

Soit X une variété algébrique complexe quasi-projective lisse et connexe, de dimension n sur \mathbf{C} . Soit $\mathrm{Coh}(X)$ la catégorie abélienne des faisceaux algébriques cohérents sur X et $K(X)$ son *groupe de Grothendieck* à coefficients rationnels, *i.e.* le quotient du \mathbf{Q} -espace vectoriel engendré par les classes d'isomorphisme $[\mathcal{F}]$ de faisceaux algébriques cohérents \mathcal{F} sur X par les relations $[\mathcal{F}'] - [\mathcal{F}] + [\mathcal{F}''] = 0$ pour toute suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ dans $\mathrm{Coh}(X)$. On munit l'espace $K(X)$ d'une structure d'algèbre commutative en définissant pour tous faisceaux \mathcal{F}, \mathcal{G} sur X le produit dans $K(X)$:

$$[\mathcal{F}] \cdot [\mathcal{G}] := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} + \sum_{p \geq 1} (-1)^p \mathrm{Tor}_p^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

Puisque X est lisse et quasi-projective, tout faisceau cohérent sur X admet une résolution finie par des faisceaux localement libres. L'algèbre $K(X)$ est donc isomorphe à l'algèbre de K-théorie construite à partir des fibrés vectoriels algébriques sur X (voir [BS58]).

Le *caractère de Chern* est le morphisme \mathbf{Q} -linéaire :

$$ch : K(X) \longrightarrow H^*(X),$$

défini comme suit : pour tout fibré vectoriel F sur X , de rang r et de classes de Chern $c_i \in H^{2i}(X)$ pour tout $i \geq 1$, on pose :

$$ch[F] := r.[X] + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} Q_k(c_1, \dots, c_k)$$

où Q_k désigne le k -ième polynôme de Newton en les fonctions symétriques élémentaires et $[X] \in H^0(X)$ désigne le cycle fondamental cohomologique de la variété X . On étend ensuite cette définition par linéarité à tout faisceau algébrique cohérent sur X .

On suppose que la cohomologie de X est engendrée par des cycles algébriques. Alors la cohomologie impaire de X est nulle et on a le théorème suivant :

Théorème. — *Le caractère de Chern $ch : K(X) \longrightarrow H^{2*}(X)$ est un isomorphisme de \mathbf{Q} -algèbres.*

Pour tout faisceau algébrique cohérent \mathcal{F} sur X , on appelle *support* de \mathcal{F} le fermé algébrique :

$$\text{Supp } \mathcal{F} := \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\},$$

où \mathcal{F}_x désigne le germe de \mathcal{F} en x .

On construit une filtration décroissante :

$$0 = F_{n+1}K(X) \subset F_nK(X) \subset \cdots \subset F_0K(X) = K(X)$$

en définissant $F_kK(X)$ comme le sous-espace vectoriel de $K(X)$ engendré par les faisceaux \mathcal{F} tels que $\text{codim}(\text{Supp } \mathcal{F}) \geq k$.

Proposition (Dévissage). — [CG97, Proposition 5.9.3] *Soit \mathcal{F} un faisceau algébrique cohérent sur X tel que $\text{codim}(\text{Supp } \mathcal{F}) = d$ et S_1, \dots, S_m les composantes irréductibles de codimension d de $\text{Supp } \mathcal{F}$. Alors $[\mathcal{F}] \in F_dK(X)$ et il existe des entiers positifs $\text{mult}(\mathcal{F}, S_i) \in \mathbf{N}$ tels que dans $K(X)$:*

$$[\mathcal{F}] = \sum_{i=1}^m \text{mult}(\mathcal{F}, S_i) [\mathcal{O}_{S_i}] \mod (F_{d+1}K(X)).$$

L'entier $\text{mult}(\mathcal{F}, S_i)$ est appelé la *mutiplicité* de \mathcal{F} en S_i et le cycle algébrique :

$$[\text{Supp } \mathcal{F}] = \sum_{i=1}^m \text{mult}(\mathcal{F}, S_i) [S_i] \in H^{2d}(X)$$

est appelé le *cycle support* de \mathcal{F} .

Proposition. — [CG97, Proposition 5.9.7, Lemme 5.9.13] *Pour tout k ,*

- (i) $ch : F_kK(X) \rightarrow H^{2*}(X)$ *est à valeurs dans* $\bigoplus_{j \geq k} H^{2j}(X)$;

(ii) l'application induite $ch : F_k K(X) / F_{k+1} K(X) \rightarrow H^{2k}(X)$ est donnée par :

$$[\mathcal{F}] \mod (F_{k+1} K(X)) \mapsto [\text{Supp } \mathcal{F}].$$

Le gradué associé à la filtration est noté :

$$\text{gr } K(X) := \bigoplus_{k=0}^n F_k K(X) / F_{k+1} K(X).$$

Le comportement du produit par rapport à la filtration est donné par la proposition suivante :

Proposition. — Si $[\mathcal{F}] \in F_i K(X)$ et $[\mathcal{G}] \in F_j K(X)$ alors pour tout $p \geq 0$:

$$\text{Tor}_p^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in F_{i+j+p} K(X).$$

Démonstration. — La proposition découle directement des deux arguments suivants :

- si \mathcal{F}, \mathcal{G} sont deux faisceaux algébriques cohérents sur X , il existe un ouvert de Zariski non vide inclus dans l'intersection des supports de \mathcal{F} et \mathcal{G} sur lequel les deux faisceaux sont localement libres de rang non nul. On en déduit que le support de $\text{Tor}_1^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est de codimension au moins 1 dans le support de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$.
- il existe une suite spectrale $\text{Tor}_p^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \text{Tor}_q^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \implies \text{Tor}_{p+q}^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, donc le support de l'aboutissement est contenu dans le support du terme initial.

□

On en déduit que le produit induit sur le gradué associé munit l'espace $\text{gr } K(X)$ d'une structure d'algèbre commutative graduée. On obtient enfin le résultat suivant :

Corollaire. — Le caractère de Chern $ch : \text{gr } K(X) \rightarrow H^{2*}(X)$ est un isomorphisme de \mathbf{Q} -algèbres graduées donné explicitement par $[\mathcal{F}] \mapsto [\text{Supp } \mathcal{F}]$.

APPENDICE D

DEGRÉ DE COMPLEXITÉ

Rappelons la définition du *degré de complexité* (voir le chapitre 6). Soit G un groupe fini agissant linéairement sur un espace vectoriel de dimension finie V . Tout élément $g \in G$ est un endomorphisme de V et admet une *décomposition de Frobenius* : partant d'un vecteur non nul $v_1 \in V$, l'orbite $v_1, g(v_1), g^2(v_1) \dots$ engendre un sous-espace vectoriel V_1 de dimension finie λ_1 . En recommençant sur le supplémentaire, on obtient une décomposition $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ telle que la matrice de g est une diagonale d'endomorphismes cycliques (dont la matrice est la matrice compagnon de leur polynôme caractéristique). On définit alors le *degré de complexité* par :

$$\langle g \rangle := \prod_{i=1}^k \lambda_i.$$

Puisque la décomposition de Frobenius est invariante par conjugaison, ce nombre est invariant par conjugaison. Par exemple, $\langle id_G \rangle = 1$. Ce nombre reflète la complexité de l'action de g sur V , en un sens que nous allons préciser dans le contexte du groupe symétrique S_n agissant par permutation sur \mathbf{C}^n (dans la base canonique).

Soit $\sigma \in S_n$. À conjugaison près, on peut supposer que σ se décompose comme produit de cycles disjoints :

$$\sigma = (1, \dots, \lambda_1) \circ (\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_1 + \lambda_2) \circ \dots \circ (\lambda_1 + \dots + \lambda_{k-1} + 1, \dots, \lambda_1 + \dots + \lambda_k)$$

où les cycles sont de longueur $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Alors $\langle \sigma \rangle = \prod_{i=1}^k \lambda_i$ tandis que

$$n = \sum_{i=1}^k \lambda_i.$$

Pour comprendre mieux ce degré de complexité, nous allons calculer sa valeur maximale et nous posons pour tout $n \geq 1$:

$$\kappa_n := \max \left\{ \prod_{i=1}^k \lambda_i \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n \right\}.$$

On calcule aisément les premières valeurs :

$$\begin{array}{cccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 6, & 9, & 12, & 18, & 27, & 36 \\ 54, & 81, & 108, & 162, & 243, & 324, & 486, & 729, & 1458, & 2187, \\ 2916, & 4374, & 6561, & 8748, & 13122, & 19683, & \dots \end{array}$$

Selon que l'entier n a été décomposé en $k + (n - k)$ puis partitionné encore ou pas, ou n'est pas décomposé, on conclut la récurrence suivante (en commençant avec $\kappa_1 = 1$) :

$$\kappa_n = \max \{ n, \{ \kappa_k \cdot \kappa_{n-k} \mid k = 1, \dots, n-1 \} \}.$$

La valeur de κ_n est donnée par :

Proposition D.0.1. — Soit $n \geq 1$. Alors :

- Si $n = 3a$, alors $\kappa_n = 3^a$;
- Si $n = 3a + 1$, alors $\kappa_n = 2^2 \cdot 3^{a-1}$;
- Si $n = 3a + 2$, alors $\kappa_n = 2 \cdot 3^a$.

Ainsi, une permutation a un degré de complexité maximal lorsqu'elle contient un nombre maximal de 3-cycles. Toutefois, cette décomposition ne doit pas laisser un point fixe : si cela devait être, le dernier 3-cycle et le point fixe résiduel doivent être changés en 2 transpositions (ou, certes, un 4-cycle) pour atteindre la complexité maximale. Les décompositions les plus complexes sont donc $(3, 3, \dots, 3)$ ou $(2, 3, \dots, 3)$ ou $(2, 2, 3, \dots, 3)$.

Démonstration. — Nous procédons par récurrence forte, en supposant $n \geq 6$ (la formule est aisément vérifiable pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$), en étudiant la division euclidienne de n par 3, notée $n = 3a + b, 0 \leq b \leq 2$ et en utilisant la formule récurrente.

- Si $n = 3a$, supposons une décomposition $n = k + (n - k)$, $k \geq 1$. Par division euclidienne, on a $3a = (3a_1 + b_1) + (3a_2 + b_2)$ avec $b_1 + b_2 \equiv 0[3]$.

Les cas possibles sont :

- $b_1 = b_2 = 0$. Alors $a = a_1 + a_2$ (ceci suppose $a \geq 2$) et :

$$\kappa_k \cdot \kappa_{n-k} = 3^{a_1} \cdot 3^{a_2} = 3^a;$$

– $b_1 = 1$ et $b_2 = 2$. Alors $a = a_1 + a_2 + 1$ et :

$$\kappa_k \cdot \kappa_{n-k} = 2^2 \cdot 3^{a_1-1} \cdot 2 \cdot 3^{a_2} = 2^3 \cdot 3^{a-2};$$

– $b_1 = 2$ et $b_2 = 1$. De même, $\kappa_k \cdot \kappa_{n-k} = 2^3 \cdot 3^{a-2}$.

Puisque $2^3 < 3^2$, on a $3^a > 2^3 \cdot 3^{a-2}$ donc $\kappa_n = \max\{n, 3^a\}$. En supposant $n \geq 6$ on a donc $\kappa_n = 3^a$.

Les deux autres cas se traitent de même. Nous les faisons brièvement.

– Si $n = 3a + 1$, $3a + 1 = (3a_1 + b_1) + (3a_2 + b_2)$ avec $b_1 + b_2 \equiv 1[3]$.

– $b_1 = b_2 = 2$. Alors $a = a_1 + a_2 + 1$ et :

$$\kappa_k \cdot \kappa_{n-k} = 2 \cdot 3^{a_1} \cdot 2 \cdot 3^{a_2} = 2^2 \cdot 3^{a-1};$$

– $b_1 = 0$ et $b_2 = 1$. Alors $a = a_1 + a_2$ (ceci suppose $a \geq 1$) et :

$$\kappa_k \cdot \kappa_{n-k} = 3^{a_1} \cdot 2^2 \cdot 3^{a_2-1} = 2^2 \cdot 3^{a-1};$$

– $b_1 = 1$ et $b_2 = 0$. De même, $\kappa_k \cdot \kappa_{n-k} = 2^2 \cdot 3^{a-1}$.

Pour $n \geq 4$ on a donc $\kappa_n = 2^2 \cdot 3^{a-1}$.

– Si $n = 3a + 2$, $3a + 2 = (3a_1 + b_1) + (3a_2 + b_2)$ avec $b_1 + b_2 \equiv 2[3]$.

– $b_1 = b_2 = 1$. Alors $a = a_1 + a_2$ et :

$$\kappa_k \cdot \kappa_{n-k} = 2^2 \cdot 3^{a_1-1} \cdot 2^2 \cdot 3^{a_2-1} = 2^4 \cdot 3^{a-2};$$

– $b_1 = 0$ et $b_2 = 2$. Alors $a = a_1 + a_2$ (avec $a \geq 1$) et :

$$\kappa_k \cdot \kappa_{n-k} = 3^{a_1} \cdot 2 \cdot 3^{a_2} = 2 \cdot 3^a;$$

– $b_1 = 2$ et $b_2 = 0$. De même, $\kappa_k \cdot \kappa_{n-k} = 3^{a_1} \cdot 2 \cdot 3^{a_2} = 2 \cdot 3^a$.

Pour $n \geq 5$ on a donc $\kappa_n = 2 \cdot 3^a$ car $2^3 < 3^2$.

□

APPENDICE E

CARQUOIS DE MCKAY POUR LE GROUPE SYMÉTRIQUE

Dans cette note, nous décrivons le carquois de McKay pour l'action par permutation du groupe symétrique S_n sur \mathbf{C}^n , afin d'imaginer quelle pourrait être une généralisation de la correspondance de McKay « géométrique », *i.e.* comprendre ce qui pourrait remplacer l'observation fondatrice en dimension 2 disant que le carquois de McKay et le graphe de la résolution des singularités sont les mêmes. En effet, dans les cas que nous étudions, une résolution projective crépante des singularités $Y \rightarrow V/G$ fournit un isomorphisme des groupes de Grothendieck $K(Y) \cong R(G)$ (voir Bezrukavnikov & Kaledin [BK] et Bridgeland [Bri02]). Cependant, deux résolutions projectives crépantes différentes peuvent avoir un comportement très différent vis-à-vis de la correspondance géométrique de McKay, ainsi que le montre T  rouanne [T  r04] sur des exemples en dimension 3.

Soit Q la représentation par permutation de S_n sur \mathbf{C}^n :

$$Q = \mathrm{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n} \mathbf{C}.$$

Rappelons les *règles de branchement* (ce sont des conséquences de la règle de Littlewood-Richardson : voir Manivel [Man98, (1.6.13)] et Kerber [Ker, (4.52)]). Pour une partition λ de n , on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_{S_n}^{S_{n+1}} V^\lambda &= \sum_{\mu \in \lambda \otimes 1} V^\mu, \\ \mathrm{Res}_{S_{n-1}}^{S_n} V^\lambda &= \sum_{\lambda \in \nu \otimes 1} V^\nu, \end{aligned}$$

où $\lambda \otimes 1$ désigne l'ensemble des partitions que l'on peut obtenir à partir de λ en rajoutant une cellule à son diagramme de Young.

En particulier, $Q = \text{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n} V^{(n-1)} = V^{(n)} \oplus V^{(n-1,1)}$. On calcule alors le carquois de McKay en utilisant la *formule de projection* (voir Fulton & Harris [FH91, Exercice 3.16]) :

$$\begin{aligned} V^\lambda \otimes Q &= V^\lambda \otimes \text{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n} \mathbf{C} \\ &= \text{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n} \left(\text{Res}_{S_{n-1}}^{S_n} V^\lambda \otimes \mathbf{C} \right) \\ &= \sum_{\lambda \in \nu \otimes 1} \sum_{\mu \in \nu \otimes 1} V^\mu. \end{aligned}$$

Ainsi, $V^\lambda \otimes Q$ contient exactement les représentations V^μ pour les partitions μ que l'on peut obtenir à partir de λ en bougeant exactement une cellule dans le diagramme de Young de λ . En notant les décompositions par :

$$V^\lambda \otimes Q = \bigoplus_{\mu \vdash n} a_{\lambda,\mu} V^\mu$$

on a donc $a_{\lambda,\mu} = 0$ si les diagrammes de λ et μ diffèrent de plus d'une cellule, $a_{\lambda,\lambda}$ est le nombre de partitions distinctes que l'on peut obtenir à partir de λ en retirant une cellule (ce nombre compte les *boucles* du carquois) et dans les autres cas $a_{\lambda,\mu} = 1$: toute autre représentation que V^λ intervenant dans la décomposition arrive avec une multiplicité 1. En effet, si ν, ν' sont deux partitions différant d'une cellule exactement, alors $(\nu \otimes 1) \cap (\nu' \otimes 1)$ est un singleton. Il est alors facile de dresser les carquois de McKay (nous ne dessinons pas les boucles). Il apparaît naturel de lister les partitions par longueur décroissante (*i.e.* par degré cohomologique croissant).

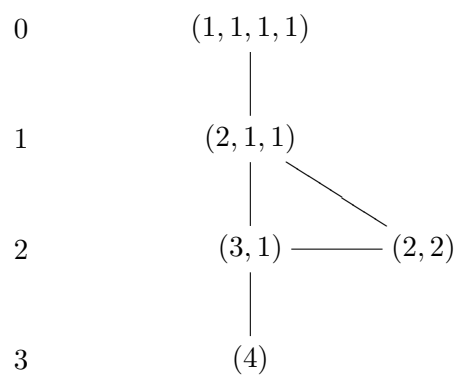
Carquois de McKay pour $n = 2$:

$$\begin{array}{ccc} 0 & & (1, 1) \\ & & \downarrow \\ 1 & & (2) \end{array}$$

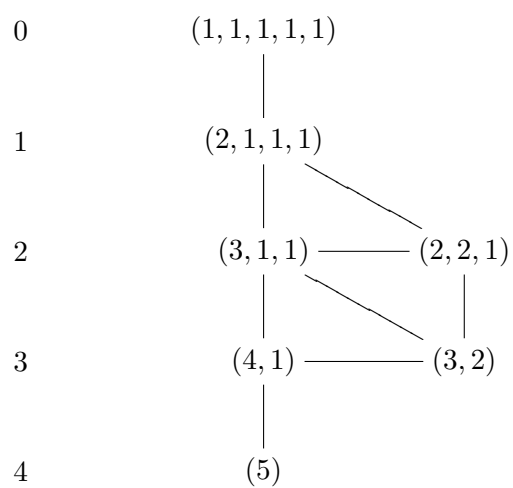
Carquois de McKay pour $n = 3$:

$$\begin{array}{ccc} 0 & & (1, 1, 1) \\ & & \downarrow \\ 1 & & (2, 1) \\ & & \downarrow \\ 2 & & (3) \end{array}$$

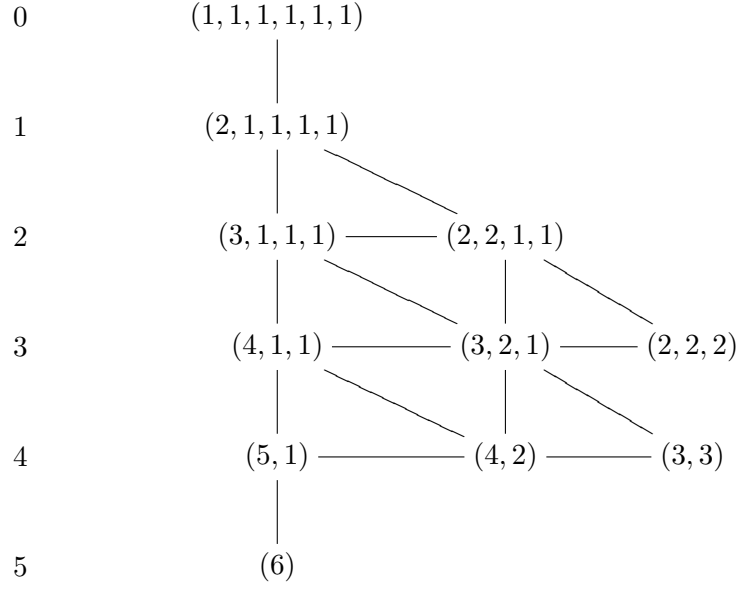
Carquois de McKay pour $n = 4$:



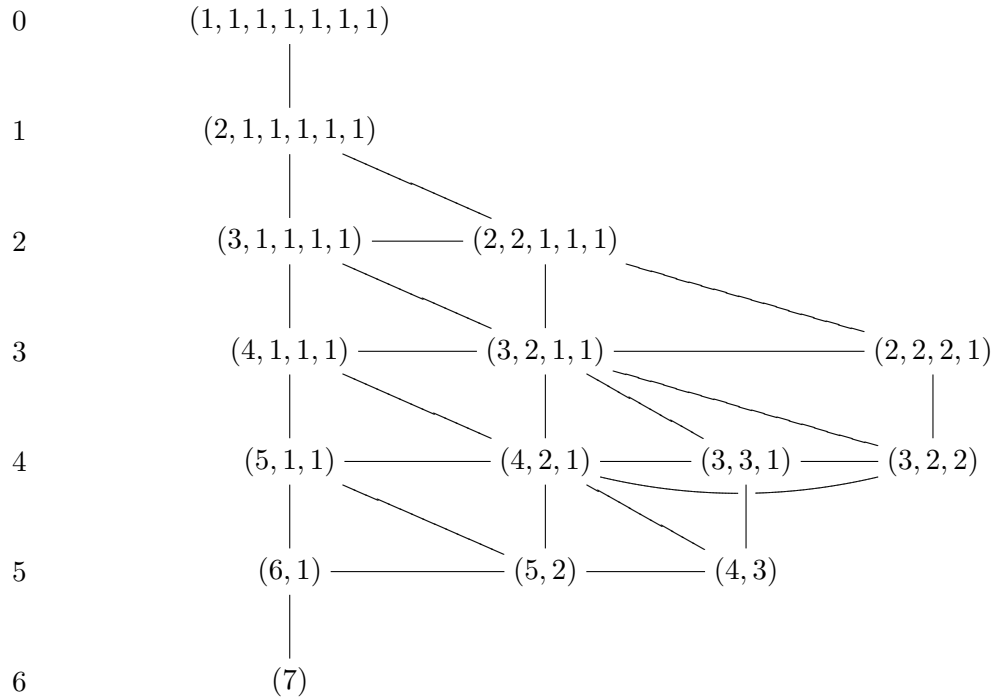
Carquois de McKay pour $n = 5$:



Carquois de McKay pour $n = 6$:



Carquois de McKay pour $n = 7$:



BIBLIOGRAPHIE

- [AB84] M. ATIYAH & R. BOTT – « The moment map and equivariant cohomology », *Topology* **23** (1984), no. 1, p. 1–28.
- [BK] R. BEZRUKAVNIKOV & D. KALEDIN – « McKay equivalence for symplectic resolutions of singularities », [arXiv :math.AG/0401002](https://arxiv.org/abs/math/0401002).
- [BKR01] T. BRIDGELAND, A. KING & M. REID – « The McKay correspondence as an equivalence of derived categories », *Journal of the American Mathematical Society* **14** (2001), no. 3, p. 535–554, [arXiv :math.AG/9908027](https://arxiv.org/abs/math/9908027).
- [Boia] S. BOISSIÈRE – « Chern classes of the tangent bundle on the Hilbert scheme of points on the affine plane », preprint.
- [Boib] ———, « On the McKay correspondences for the Hilbert scheme of points on the affine plane », preprint.
- [Boic] ———, « On the multiplicative structure of the Bridgeland-King-Reid theorem for the Hilbert scheme of points on the affine plane », preprint.
- [Bri98] M. BRION – « Equivariant cohomology and equivariant intersection theory », 1998, [arXiv :math.AG/9802063](https://arxiv.org/abs/math/9802063).
- [Bri00] ———, « Poincaré duality and equivariant (co)homology », *Michigan Mathematical Journal (special volume in honor of William Fulton)* **48** (2000), p. 77–92, [http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~mbrion/](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~mbrion/).

- [Bri02] T. BRIDGELAND – « Flops and derived categories », *Inventiones Mathematicae* **147** (2002), p. 613–632.
- [Bry] J.-L. BRYLINSKI – « A correspondence dual to McKay's », *arXiv :math.AG/96102003*.
- [BS58] A. BOREL & J.-P. SERRE – « Le théorème de Riemann-Roch », *Bulletin de la Société Mathématique de France* **86** (1958), p. 97–136.
- [BT91] R. BOTT & L. W. TU – *Differential forms in Algebraic Topology*, Springer, 1991.
- [BZF01] D. BEN-ZVI & E. FRENKEL – *Vertex algebras and algebraic curves*, AMS, 2001.
- [CG97] N. CHRISS & V. GINZBURG – *Representation theory and complex geometry*, Birkhäuser, 1997.
- [Com70] L. COMTET – *Analyse combinatoire*, PUF, 1970.
- [Cra01] A. CRAW – « The McKay correspondence and representations of the McKay quiver », Thèse, University of Warwick, 2001.
- [Dan01] G. DANILA – « Sur la cohomologie d'un fibré tautologique sur le schéma de Hilbert d'une surface », *Journal of Algebraic Geometry* **10** (2001), p. 247–280, *arXiv :math.AG/9904004*.
- [EG97] D. EDIDIN & W. GRAHAM – « Characteristic classes in the Chow ring », *Journal of Algebraic Geometry* **6** (1997), p. 431–443.
- [EG98] ———, « Localization in equivariant intersection theory and the Bott residue formula », *American Journal of Mathematics* **120** (1998), p. 619–636.
- [EG99] G. ELLINGSRUD & L. GÖTTSCHE – « Hilbert schemes of points and Heisenberg algebras », in *Moduli spaces in Algebraic Geometry*, 1999.
- [EGL01] G. ELLINGSRUD, L. GÖTTSCHE & M. LEHN – « On the cobordism class of the Hilbert scheme of a surface », *Journal of Algebraic Geometry* **10** (2001), p. 81–100, *arXiv :math.AG/9904095*.
- [ES87] G. ELLINGSRUD & S. A. STRØMME – « On the homology of the Hilbert scheme of points in the plane », *Inventiones Mathematicae* **87** (1987), p. 343–352.

- [FH91] W. FULTON & J. HARRIS – *Representation theory*, Springer, 1991.
- [Fog68] J. FOGARTY – « Algebraic families on an algebraic surface », *American Journal of Mathematics* **10** (1968), p. 511–521.
- [Ful84] W. FULTON – *Intersection theory*, Springer, 1984.
- [Ful97] ———, *Young tableaux*, Cambridge University Press, 1997.
- [GK04] V. GINZBURG & D. KALEDIN – « Poisson deformations of symplectic quotient singularities », *Advances in Mathematics* **186** (2004), p. 1–57, [arXiv :math.AG/0212279](https://arxiv.org/abs/math/0212279).
- [Gro] A. GROTHENDIECK – « Classes de faisceaux et théorème de Riemann-Roch », in *SGA 6 : Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch*, Springer Lecture Notes 225.
- [Gro61] ———, « Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, IV : les schémas de Hilbert », *Séminaire Bourbaki* **221** (1960-1961).
- [GS] D. R. GRAYSON & M. E. STILLMAN – « Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry », [http :www.math.uiuc.edu/Macaulay2/](http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/).
- [GSV83] G. GONZALES-SPRINBERG & J.-L. VERDIER – « Construction géométrique de la correspondance de McKay », *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* **16** (1983), p. 409–449.
- [Hai98] M. HAIMAN – « t, q -Catalan numbers and the Hilbert scheme », *Discrete Mathematics* **193** (1998), p. 201–224.
- [Hai99] ———, « Macdonald polynomials and geometry », in *New perspectives in geometric combinatorics*, vol. 38, 1999, p. 207–254.
- [Hai01a] ———, « Hilbert schemes, polygraphs and the Macdonald positivity conjecture », *Journal of the American Mathematical Society* **14** (2001), p. 941–1006.
- [Hai01b] ———, « Notes on Macdonald polynomials and the geometry of Hilbert schemes », 2001, [http ://math.berkeley.edu/~mhaiman/](http://math.berkeley.edu/~mhaiman/).
- [Hai02] ———, « Vanishing theorems and character formulas for the Hilbert scheme of points in the plane », *Inventiones Mathematicae* **149** (2002), p. 371–407.

- [Hai03] ———, « Combinatorics, symmetric functions and Hilbert schemes », 2003, <http://math.berkeley.edu/~mhaiman/>.
- [Har77] R. HARTSHORNE – *Algebraic geometry*, Springer, 1977.
- [Hir66] F. HIRZEBRUCH – *Topological methods in Algebraic Geometry*, Springer, 1966.
- [IN96] Y. ITO & I. NAKAMURA – « McKay correspondence and Hilbert schemes », *Proceedings of Japan Acad.* **72** (1996), p. 135–138.
- [IN00] Y. ITO & H. NAKAJIMA – « McKay correspondence and Hilbert schemes in dimension three », *Topology* **39** (2000), p. 1155–1191.
- [IR94] Y. ITO & M. REID – « The McKay correspondence for finite subgroups of $SL(3, \mathbb{C})$ », 1994, [arXiv :math.AG/9411010](#).
- [Kac97] V. KAC – *Vertex algebras for beginners*, AMS, 1997.
- [Kal] D. KALEDIN – « Multiplicative McKay correspondence in the symplectic case », [arXiv :math.AG/0311409](#).
- [Kal99] ———, « Dynkin diagrams and crepant resolutions of quotient singularities », 1999, [arXiv :math.AG/9903157](#).
- [Kal02] ———, « McKay correspondence for symplectic quotient singularities », *Inventiones Mathematicae* **148** (2002), p. 151–175.
- [Ker] A. KERBER – « Representations of permutation groups I », LNM 240.
- [Leh] M. LEHN – Communication privée.
- [Leh99] ———, « Chern classes of tautological sheaves on Hilbert schemes of points on surfaces », *Inventiones Mathematicae* **136** (1999), p. 157–207.
- [LQW01] W.-P. LI, Z. QIN & W. WANG – « Generators for the cohomology ring of Hilbert schemes of points on surfaces », *Intern. Math. Res. Notices* **20** (2001), p. 1057–1074, [arXiv :math.AG/0009167](#).
- [LQW02] ———, « Vertex algebras and the cohomology ring structure of Hilbert schemes of points on surfaces », *Mathematische Annalen* **324** (2002), p. 105–133, [arXiv :math.AG/0009132](#).

- [LQW03a] ———, « Hilbert schemes, integrable hierarchies and Gromov-Witten theory », 2003, [arXiv :math.AG/0302211](#).
- [LQW03b] ———, « Stability of the cohomology rings of Hilbert schemes of points on surfaces », *Journal für eine reine und angewandte Mathematik* **554** (2003), p. 217–234, [arXiv :math.AG/0107139](#).
- [LS01] M. LEHN & C. SORGER – « Symmetric groups and the cup product on the cohomology of Hilbert schemes », *Duke Mathematical Journal* **110** (2001), p. 345–357.
- [Lus88] G. LUSZTIG – « Cuspidal local systems and graded Hecke algebras, I », *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.* **67** (1988), p. 145–202.
- [Mac79] I. G. MACDONALD – *Symmetric functions and hall polynomials (seconde édition 1995)*, Oxford University Press, 1979.
- [Mac91] ———, *Symmetric functions and orthogonal polynomials*, American Mathematical Society, 1991.
- [Man98] L. MANIVEL – *Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence*, Société Mathématique de France, 1998.
- [McK80] J. MCKAY – « Graphs, singularities and finite groups », *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* **37** (1980), p. 183–186.
- [MOS66] W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER & R. P. SONI – *Formulas and theorems for the special functions in mathematical physics, third edition*, Springer, 1966.
- [MS74] J. W. MILNOR & J. D. STASHEFF – *Characteristic classes*, Princeton University Press, 1974.
- [Nak96a] H. NAKAJIMA – « Jack polynomials and Hilbert schemes of points on surfaces », 1996, [arXiv :math.AG/9610021](#).
- [Nak96b] ———, *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*, American Mathematical Society, 1996.
- [Nak97] ———, « Heisenberg algebra and Hilbert schemes of points on projective surfaces », *Annals of mathematics* **145** (1997), p. 379–388.

- [Nak01] I. NAKAMURA – « Hilbert schemes of abelian group orbits », *Journal of Algebraic Geometry* **10** (2001), p. 757–779.
- [Pro02] C. PROCESI – « On the $n!$ -conjecture », *Séminaire Bourbaki 54e année* **898** (2001-2002).
- [Rei] M. REID – « Chapters on algebraic surfaces », [arXiv :math.AG/9602006](#).
- [Rei97] ———, « McKay correspondence », 1997, [arXiv :math.AG/9702016](#).
- [Rei00] ———, « La correspondance de McKay », *Séminaire Bourbaki 52e année* **867** (1999-2000), p. 53–72.
- [Tér04] S. TÉROUASSE – « Correspondance de McKay : variations en dimension 3 », Thèse, Institut Fourier de Grenoble, 2004.
- [Vas01] E. VASSEROT – « Sur l’anneau de cohomologie du schéma de Hilbert de \mathbf{C}^2 », *Comptes-Rendus de l’Académie des Sciences de Paris* **332** (2001), p. 7–12.

Sur les correspondances de McKay pour le schéma de Hilbert de points sur le plan affine

Mots clés.— Schéma de Hilbert, correspondance de McKay, fonctions symétriques, cohomologie équivariante, classes caractéristiques, polynômes de Macdonald.

Résumé.— Le quotient d'un espace vectoriel de dimension finie par l'action d'un sous-groupe fini d'automorphismes est une variété en général singulière. Sous bonnes hypothèses, la correspondance de McKay relie la géométrie de bonnes résolutions des singularités aux représentations du groupe. Pour le schéma de Hilbert de points sur le plan affine, nous étudions comment les différentes correspondances (McKay, McKay duale et McKay multiplicative) sont reliées les unes aux autres. A cette fin, nous calculons des formules combinatoires pour les fibrés vectoriels usuels sur le schéma de Hilbert de points sur le plan affine. Parallèlement à ces questions, nous étudions le comportement multiplicatif du théorème de Bridgeland, King & Reid construisant la correspondance de McKay pour le schéma de Hilbert de points sur le plan affine. Dans une dernière partie, nous calculons les classes de Chern du fibré tangent au schéma de Hilbert de points sur le plan affine.

On the McKay correspondences for the Hilbert scheme of points on the affine plane

Keywords.— Hilbert scheme, McKay correspondence, symmetric functions, equivariant cohomology, characteristic classes, Macdonald polynomials.

Abstract.— The quotient of a finite-dimensional vector space by the action of a finite subgroup of automorphisms is usually a singular variety. Under appropriate assumptions, the McKay correspondence relates the geometry of nice resolutions of singularities and the representations of the group. For the Hilbert scheme of points on the affine plane, we study how the different correspondences (McKay, dual McKay and multiplicative McKay) are related to each other. For this purpose, we compute combinatorial formulas for the usual vector bundles on the Hilbert scheme of points on the affine plane. We also study the multiplicative behavior of the theorem of Bridgeland, King & Reid constructing the McKay correspondence for the Hilbert scheme of points on the affine plane. We finish with the computation of the Chern classes of the tangent bundle on the Hilbert scheme of points on the affine plane.